<u>«ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΤΑΤΟΜΗ ΚΑΝΟΝΟΣ»</u>

<u>Ποιος ήταν ο Ευκλείδης</u>

Εισάγοντας τον αναγνώστη του στην *«Κατατομή Κανόνος»*, ο Χαράλαμπος Σπυρίδης δίνει μερικά στοιχεία γι' αυτόν και το έργο του:

Ο αρχαίος Έλληνας δάσκαλος της Αριθμητικής και της Γεωμετρίας Ευκλείδης έζησε περί το 330 με 270 π.Χ. Όσον αφορά την καταγωγή του, δεν είναι όλα γνωστά. Κατά μία παράδοση, ο Ευκλείδης γεννήθηκε στην πόλη Γέλα της Σικελίας. Αραβικές πηγές, όμως, τον φέρουν να γεννήθηκε στη Συρία, ίσως και στην Τύρο της Φοινίκης. Σπούδασε στην Αθήνα και, μόλις τελείωσε τις σπουδές του, επέστρεψε στην Αλεξάνδρεια, όπου προσκλήθηκε από τον βασιλιά της Αιγύπτου, τον Πτολεμαίο τον Α΄, να διδάξει Αριθμητική και Γεωμετρία.

Μνημειώδες έργο του Ευκλείδη είναι τα *«Στοιχεία»*. Το έργο αυτό αποτελείται από 13 βιβλία. Ειδικά τα βιβλία τα οποία πραγματεύονται τα στερεά σώματα, είναι εμπνευσμένα από την πυθαγόρεια και την πλατωνική φιλοσοφία. Άλλα έργα του είναι τα «*Φαινόμενα*», τα «*Οπτικά και Κατοπτρικά*», τα *«Δεδομένα»*, τα *«Κωνικά»*, τα *«Πορίσματα»*, τα *«Ψευδάρια»* και η *«Κατατομή Κανόνος»*.

<u>Κάποια στοιχεία για την «Κατατομή Κανόνος» - Andrew Barker vs. Andrew Barbera</u>

Στις παραγράφους που ακολουθούν γίνεται λόγος για την πατρότητα του έργου, για τη χρονολογική τοποθέτηση της συγγραφής του, για την ενιαία ή αποσπασματική συγγραφή του, για τις εμφανείς επιρροές του από και προς την πυθαγόρεια θεωρία της μουσικής, όλα αυτά μέσα από τα άλλοτε αλληλοσυμπληρούμενα και άλλοτε αντικρουόμενα επιχειρήματα των Andrew Barker και Andrew Barbera.

Είναι αλήθεια ότι τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες είναι τόπος της μουσικής (Πυριοβόλης Παναγιώτης). Η *«Κατατομή Κανόνος» (Sectio Canonis)* είναι το έργο εκείνο που καταπιάνεται με τον προσδιορισμό των αριθμητικών αναλογιών των φθόγγων της μουσικής κλίμακας πάνω στον κανόνα (ή αλλιώς μονόχορδο, κατά τον Πτολεμαίο, τον Ιάμβλιχο, τον Νικόμαχο). Ο κανών ή μονόχορδο ή χορδοτόνιο ήταν ένας βαθμονομημένος ξύλινος χάρακας, πάνω στον οποίο στηριζόταν μια ομοιόμορφα τεταμένη χορδή. Η χορδή αυτή μπορούσε κάθε φορά να διαιρείται με διαφορετικό τρόπο, ανάλογα με τη θέση που έπαιρνε ο κινούμενος ξύλινος καβαλάρης (στα αρχαία ελληνικά «μαγάς» ή «υπαγωγέας»), που βρισκόταν ακριβώς ανάμεσα σε εκείνη και τον χάρακα. Οι θιασώτες αυτής της σχολής ονομάζονταν «κανονικοί», ενώ όσοι τάσσονταν με τη σχολή του Αριστόξενου

καλούνταν «μουσικοί ή εμπειρικοί». Ας γίνει ξεκάθαρο ότι η *«Κατατομή Κανόνος»* είναι ένα έργο που στηρίζεται αποκλειστικά στον μονόχορδο κανόνα. Κι αυτό γιατί οι αρχαίοι Έλληνες μουσικοί είχαν κι άλλους κανόνες, όπως ο οκτάχορδος, ο πεντεκαιδεκάχορδος και η κιθάρα.

Πρώτα απ' όλα, αξίζει να γίνει μια σύντομη αναφορά στους λόγους για τους οποίους η *«Κατατομή Κανόνος»* πρέπει να αντιμετωπιστεί ως αντιπροσωπευτική της πυθαγόρειας μουσικής και ακουστικής θεωρίας. Σύμφωνα με μεταγενέστερους σχολιαστές, υπάρχουν δύο βασικές διαφορές ανάμεσα στην πυθαγόρεια και την αριστοξένεια προσέγγιση: καταρχήν, η πρώτη αντιμετωπίζει τα διαστήματα ως λόγους αριθμών, ενώ η δεύτερη τα εκλαμβάνει ως αποστάσεις πάνω σε ένα γραμμικό συνεχές κι από την άλλη μεριά, η πυθαγόρεια προσέγγιση δίνει προτεραιότητα στην αιτία (λόγος) αντί της αισθητηριακής αντίληψης, ως κριτήριο για τη μουσική, ενώ η αριστοξένεια δίνει τον πρώτο λόγο στην αντίληψη. Η πρώτη διαφορά δείχνει ξεκάθαρα την πυθαγόρεια προέλευση της πραγματείας. Ο Πυθαγόρειος θεωρητικός χειρίζεται το μουσικό διάστημα με έναν τρόπο τελείως διαφορετικό από τον Αριστοξένειο κι αυτός ο χειρισμός χαρακτηρίζεται από τη χρήση της γλώσσας των λόγων (Πυριοβόλης Παναγιώτης).

Ο Andrew Barker, περιγράφοντας και ταυτόχρονα σχολιάζοντας την *«Κατατομή Κανόνος»*, γράφει στο βιβλίο του *«Greek Musical Writings»* ότι είναι ένα έργο αποτελούμενο από μια σύντομη εισαγωγή και από 20 προτάσεις - θεωρήματα, οι οποίες αναφέρονται σε θέματα μουσικής και εξετάζονται με βάση τα μαθηματικά της εποχής του Ευκλείδη. Υπάρχει αμφιβολία για το κατά πόσο η πραγματεία αυτή πρέπει να αποδοθεί στον Ευκλείδη. Κάποιοι μελετητές αμφισβήτησαν ότι το έργο αυτό είναι έργο ενός μόνο συγγραφέα ή ότι γράφτηκε σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Ωστόσο ο Barker θεωρεί ότι δεν υπάρχουν βάσιμοι λόγοι για να πιστεύει κανείς ότι ο συγγραφέας του κύριου μέρους (τουλάχιστον των δεκαοκτώ πρώτων προτάσεων) της πραγματείας δεν είναι ο Ευκλείδης. Η υποψία για κάτι τέτοιο γεννάται από τις δύο τελευταίες προτάσεις, διότι προϋποθέτουν μια μορφή κλίμακας διαφορετική από αυτή που ζητείται στις προτάσεις 17 και 18. Αυτή η διαφορά, σύμφωνα με τον Andrew Barker, οφείλεται σε άλλους λόγους, πέρα από τον συγγραφέα.

Όσον αφορά την εισαγωγή, εκεί προκύπτουν κάποιες αμφιβολίες, καθώς έχει κριθεί από πολλούς ως αρκετά σύντομη και σε ορισμένα σημεία μέχρι και ασαφής, κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την αρτιότητα που διέπει τις προτάσεις που έπονται αυτής. Η εισαγωγή ξεκινά με μια αναφορά στην εξάρτηση των ήχων και των τόνων τους από τις κινήσεις, δικαιολογώντας την αντιμετώπιση των τόνων ως σχετικών ποσοτήτων και των διαστημάτων μεταξύ τους ως αριθμητικών λόγων. Ακολουθούν εννέα καθαρά μαθηματικές προτάσεις, στις οποίες αποδεικνύονται ποικίλα θεωρήματα σχετικά με τους λόγους και με τα

διαστήματα (εδώ όχι απαραιτήτως μουσικά διαστήματα, αλλά ποσοτικές διαφορές) μεταξύ των όρων των λόγων αυτών. Στη συνέχεια, στην πρόταση 10 εισάγονται οι μουσικές ιδέες, ενώ στις προτάσεις 10 έως 13 γίνεται ένας συνδυασμός των προηγούμενων εννέα προτάσεων, των επιχειρημάτων της εισαγωγής και κάποιων υποθέσεων που πηγάζουν από τη μουσική εμπειρία, με σκοπό να αποδειχθούν οι λόγοι των συμφωνιών, καθώς και του τόνου. Έπειτα, οι προτάσεις 14 έως 16 αποτελούν αποδείξεις βοηθητικών θέσεων, που προκύπτουν από μια «πυθαγόρεια» αντιμετώπιση των διαστημάτων ως λόγων και που έρχονται σε αντίθεση με την αριστοξένεια προσέγγιση. Η πρόταση 17 δείχνει τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε συγκεκριμένες νότες στο εναρμόνιο γένος με τη βοήθεια των λόγων. Από την άλλη μεριά, στην πρόταση 18 προβάλλεται ένα ακόμη πιο «αντι-αριστοξένειο» επιχείρημα για τα διαστήματα που σχηματίζονται με τον τρόπο αυτό. Τέλος, στις προτάσεις 19 και 20 παρατίθεται ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να χωρίσουμε τη χορδή ενός μονόχορδου σε λόγους που να συγκροτούν ένα σύστημα στο διατονικό γένος. Πρόκειται για την κατατομή του κανόνα, απ' όπου πήρε το όνομά του και ολόκληρο το έργο.

Ο συγγραφέας ενδιαφέρεται ξεκάθαρα να δώσει συστηματικές, τυπικές αποδείξεις των προτάσεων, οι οποίες να βασίζονται στην πυθαγόρεια και την πλατωνική παράδοση. Πρέπει να σημειωθεί το γεγονός ότι οι ορολογίες που χρησιμοποιεί δεν είναι καθαρά «λογικές» ή μαθηματικές, αλλά βασίζονται τόσο σε αποδεκτά γεγονότα της καθημερινής παρατήρησης, όσο και στις φυσικές και εννοιολογικές υποθέσεις που παρατίθενται στην εισαγωγή. Τα επιχειρήματα, λοιπόν, δεν λειτουργούν ως υποκατάστατα για τη μουσική εμπειρία. Αντιπροσωπεύουν μια προσπάθεια ερμηνείας των γεγονότων αυτής της εμπειρίας στη γλώσσα των μαθηματικών, όπου οι σημασίες και οι μεταξύ τους σχέσεις μπορούν να μελετηθούν με αυστηρό τρόπο (Barker).

Όπως υποστηρίζει ο Barker, ο συγγραφέας της *«Κατατομής Κανόνος»* γνώριζε σίγουρα την ύπαρξη δύο άλλων συγγραφέων: του Αρχύτα και του ίδιου του Ευκλείδη. Κι αυτό διότι, η μεν Πρόταση 3 του έργου αποτελεί παραλλαγή ενός σημαντικού θεωρήματος που αποδείχθηκε από τον Αρχύτα (αναφέρθηκε προηγούμενα), πολλές δε προτάσεις μοιάζουν με αυτές των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη. Από την άλλη, όμως, ο συγγραφέας αποκλίνει από τις αναλύσεις του Αρχύτα για το εναρμόνιο και το διατονικό γένος (Προτάσεις 17 ως 20). Οι δε διαιρέσεις του αντιστοιχίζονται περισσότερο σε αυτές του Φιλολάου και του Πλάτωνα, καθώς επίσης και σ' εκείνες των νεοπυθαγορείων (Θέων ο Σμηρνεύς, Νικόμαχος). Και πάλι, αν και οι προτάσεις με τις οποίες ο συγγραφέας ανοίγει το έργο του παραπέμπουν στον Αρχύτα, εκείνος διαφοροποιείται απ΄τον τελευταίο κι από την επικρατούσα παράδοση γενικότερα, με τη θεωρία του ήχου που επιχειρεί να υπογραμμίσει στην εισαγωγή.

Ωστόσο, ο Andrew Barker κρίνει απαραίτητο να επισημάνει δύο αδυναμίες στην πραγματεία. Η πρώτη σχετίζεται με τη μη ικανοποιητική φύση των υποθέσεων που συνδέουν τις συμφωνίες με τους πολλαπλάσιους και τους επιμόριους λόγους, στο τέλος της εισαγωγής. Κανείς Έλληνας συγγραφέας δεν βρήκε έναν αληθοφανή τρόπο να στηρίξει αυτή τη σχέση, αλλά η ύπαρξή της ήταν ένα επίμονο πυθαγόρειο δόγμα το οποίο, συν τοις άλλοις, οδήγησε σε σοβαρή σύγχυση γύρω από το λόγο 8:3. Η επιπλέον αδυναμία που εντοπίζει ο Barker έχει να κάνει με τη χρήση στην Πρόταση 11 της θέσης που αναπτύσσεται στην εισαγωγή για τις συμφωνίες. Το επιχείρημα εκεί έχει εσφαλμένη βάση - κάτι το οποίο αποτελεί έκπληξη για ένα έργο τόσης τυπικής αυστηρότητας – και η πρόταση που βασίζεται σε αυτό είναι κρίσιμη για τα επακόλουθα.

Παρ' όλα αυτά, ο Andrew Barker θεωρεί την *«Κατατομή Κανόνος»* μια εύστοχη προσπάθεια για την κατασκευή εμπεριστατωμένων μαθηματικών αρμονικών, αν και από μια μάλλον περιορισμένη σκοπιά. Συγκρίνει, δε, τη σχέση του έργου με προηγούμενες πυθαγόρειες έρευνες και αυτή των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη με τους προηγούμενούς του στη Γεωμετρία. Τέλος, αυτό που ο Barker εντοπίζει ως το πιο αξιοσημείωτο δεν είναι ούτε αυτά που πραγματεύεται το έργο, ούτε οι αποδείξεις των θεωρημάτων του, αλλά ο τρόπος με τον οποίο όλο το σύστημα των θεωρημάτων ενσωματώνεται σε μία ολότητα.

Ο Andrew Barbera απαντά στον Barker σχετικά με την πατρότητα και την ημερομηνία της πραγματείας, την εισαγωγή, κάποια θεωρήματα και ουσιαστικά για την ιστορική και φιλοσοφική κατεύθυνση της *«Κατατομής Κανόνος»*.

Ο Barker επιλέγει να αποφύγει το θέμα της πατρότητας της *«Κατατομής Κανόνος»*. Ωστόσο, κατά τον Barbera, τα ερωτήματα «ποιος» και «πότε» είναι κρίσιμα για την εύρεση μιας απάντησης στο ερώτημα «γιατί». Με άλλα λόγια, θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε καλύτερα την *«Κατατομή Κανόνος»*, αν μπορούσαμε να την τοποθετήσουμε στο ιστορικό της πλαίσιο.

Η τμηματική φύση του έργου απασχολεί ιδιαιτέρως τον Andrew Barbera. Κατά τον τελευταίο, φαίνεται να δείχνει περισσότερους από έναν συγγραφείς, καθώς περιλαμβάνει: μια εισαγωγή, εννέα καθαρά μαθηματικά θεωρήματα – τρία από τα οποία βασίζονται σε προτάσεις που περιέχονται στο βιβλίο VIII των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη -, επτά γενικά ακουστικά θεωρήματα, τα οποία σχετίζονται με την εισαγωγή και τα πρώτα εννέα θεωρήματα, δύο θεωρήματα που αφορούν το εναρμόνιο γένος και, τέλος, δύο θεωρήματα που αφορούν τη διαίρεση μιας χορδής σύμφωνα με το διατονικό γένος. Από αυτά τα δύο τελευταία θεωρήματα προκύπτει και το όνομα της πραγματείας. Μάλιστα, δύο επανεμφανίσεις της *«Κατατομής Κανόνος»* στην ύστερη αρχαιότητα υπογραμμίζουν την τμηματική φύση της: τα σχόλια του Πορφύριου για το έργο του Πτολεμαίου *«Harmonics»* και το έργο του Βοήθειου *«De Musica»*.

Ο Πορφύριος παρουσιάζει τα θεωρήματα 1 – 16 μεμονωμένα και δίνει μια εκδοχή αυτών η οποία είναι όμοια – αλλά όχι ίδια - με την εκδοχή του Ευκλείδη. Αναρωτιέται, όμως, κανείς πού είναι η εισαγωγή και τα τέσσερα τελευταία θεωρήματα. Λίγο πριν δώσει τα θεωρήματα 1 – 16, ο Πορφύριος αναφέρεται στη «διαίρεση του μονόχορδου» του Ευκλείδη, αλλά, χωρίς τις δύο τελευταίες προτάσεις (19 και 20), ο τίτλος δεν συνάδει με τα υπόλοιπα θεωρήματα. Από την άλλη, ο Βοήθειος, στην αρχή του τέταρτου βιβλίου του έργου του *«De Musica»*, δίνει μια δική του ερμηνεία της εισαγωγής και των πρώτων εννέα θεωρημάτων. Η εκδοχή που προτείνει για την εισαγωγή διαφέρει σε πολλά σημεία από αυτή του Ευκλείδη. Για παράδειγμα, στον ορισμό του για τις σύμφωνες νότες ως μίγμα, ο Βοήθειος εισάγει την έκφραση «δονούμενες την ίδια στιγμή» ([simul pulsae]), αναφερόμενος στις μεμονωμένες νότες που παράγουν μια συμφωνία. Το ελληνικό ισοδύναμο αυτής της έκφρασης ([άμα κρούω]) υπάρχει στους περισσότερους πυθαγόρειους ορισμούς, όχι όμως στην *Κατατομή Κανόνος*. Επιπλέον, σε αντίθεση με την *Κατατομή Κανόνος*, ο Βοήθειος δεν κάνει τη σύνδεση μεταξύ ενός μεμονομένου ονόματος ή μιας συγκεκριμένης ορολογίας για τους πολλαπλάσιους ή τους επιμόριους λόγους και του μεμονωμένου μίγματος ήχων που παράγεται από δύο σύμφωνες νότες. Στην περίπτωση των θεωρημάτων, ο Βοήθειος παρεμβάλλει αριθμητικές αποδείξεις, που παραλληλίζονται με τις γνήσιες γεωμετρικές αποδείξεις. Σε κανένα σημείο αυτού του κειμένου ο Βοήθειος, ή όποιος άλλος συγγραφέας που αυτός ακολουθεί (όπως ο Νικόμαχος), δεν παραπέμπει στον Ευκλείδη ή δίνει τίτλο όπως *«Κατατομή Κανόνος»*.

Κατά τον Barbera, μια λεπτομερής σύγκριση των τριών εκδοχών (του Ευκλείδη, του Πορφύριου και του Βοήθειου), όπου αυτή είναι δυνατή (θεωρήματα 1 – 9), μας αποτρέπει από το να θεωρήσουμε τη μία από αυτές ως μοντέλο με βάση το οποίο δημιουργήθηκαν οι άλλες δύο. Για παράδειγμα, κάθε εκδοχή χρησιμοποιεί μοναδική σειρά αλφαβητικών μεταβλητών στο Θεώρημα 3. Ξεχωριστά από τον Πορφύριο και την «Κατατομή Κανόνος», ο Βοήθειος παρεμβάλλει αριθμητικές αποδείξεις στα θεωρήματα 1 ως 4 και 6 ως 9. Στο θεώρημα 6, ο Πορφύριος παραλείπει μια ανακεφαλαιωτική φράση που περιλαμβάνεται στο *«De Musica»* και στην *Κατατομή Κανόνος*.

Οι τρεις εκδοχές της πραγματείας σε συνδυασμό με την τμηματική φύση της - η εισαγωγή και τα πρώτα δεκαέξι θεωρήματα, χωρίς τον τίτλο, θα αποτελούσαν μια σχεδόν αυθύπαρκτη μουσική πραγματεία - εγείρουν ερωτήματα σχετικά με τον αριθμό των μελετητών της. Η ανομοιότητα ανάμεσα στις τρεις εκδοχές των θεωρημάτων 1 ως 9 και η ανικανότητά μας να επιλέξουμε μία απ’ αυτές ως μοντέλο αναδεικνύουν μια σύνθετη σύσταση της πραγματείας που αποκαλείται *«Κατατομή Κανόνος»*. Το κατά πόσο αυτή ή μέρος της γράφτηκαν από τον Ευκλείδη, είναι ένα άλλο θέμα, σύμφωνα με τον Barbera.

Όσον φορά την πατρότητα του έργου, ο Barbera επιχειρηματολογεί υπέρ του Ευκλείδη: μαζί με τη *«Διαίρεση του μονόχορδου από τον Ευκλείδη»*, ο Πορφύριος αναφέρει τα *«Στοιχεία της Μουσικής»*. Τόσο ο Πρόκλος, όσο και ο μαθητής του Μαρίνος, αναφέρουν επίσης ότι ο Ευκλείδης έγραψε τα *«Στοιχεία της Μουσικής»*. Αυτές οι παρατηρήσεις αποτελούν αποδεικτικά στοιχεία που μάλλον επιτρέπουν την απόδοση του έργου στον Ευκλείδη. Υπάρχουν, βέβαια, και πιο συγκεκριμένοι λόγοι για κάτι τέτοιο: με εξαίρεση τα θεωρήματα 19 και 20, τα υπόλοιπα έχουν τη μορφή στην οποία διατυπώνονται και οι προτάσεις των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη.

Ωστόσο, το ύφος και τα περιεχόμενα της *«Κατατομής Κανόνος»* έχουν διχάσει τους σύγχρονους μελετητές όσον αφορά το θέμα της απόδοσης της πραγματείας στον Ευκλείδη. Ο Karl von Jan, ένας σύγχρονος εκδότης της *«Κατατομής Κανόνος»*, ήταν πεπεισμένος ότι το έργο ανήκει στον Ευκλείδη, λόγω της γλώσσας που χρησιμοποιούταν, ενώ ο Paul Tannery θεωρούσε ότι δεν μπορούμε να αποδώσουμε το έργο στον Ευκλείδη , βασιζόμενοι στο περιεχόμενο. Ο Tannery κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο κύριος όγκος της *«Κατατομής Κανόνος»* είχε γραφτεί πριν τον Αριστόξενο και ότι πιθανώς ήταν ένα προϊόν της Ακαδημίας του Πλάτωνα. Διαβάζοντας δε τις περίφημες σημειώσεις του Πλάτωνα για τις Αρμονικές στο *Republic* (530c-531c), ο Tannery, όπως και ο Barker, προτείνει ότι η *«Κατατομή Κανόνος»* θα μπορούσε να είναι μια απάντηση στην κριτική του Πλάτωνα. Ο Andrew Barbera, στο άρθρο του *«Republic 530c-531c: Another look at Plato and the Pythagoreans»*, έχει δείξει ότι ο Πλάτωνας ενδέχεται να μην απευθύνει την κριτική του στους Πυθαγορείους και ότι, σε περίπτωση που το κάνει, οι παρατηρήσεις του είναι συγκεχυμένες και συχνά φάσκει και αντιφάσκει. Άλλοι μελετητές έχουν δει την *«Κατατομή Κανόνος»* ως μια «δήθεν» απάντηση στην πραγματεία του Αριστόξενου περί μουσικής. Ο Thomas Mathiesen παρατηρεί ότι η *«Κατατομή Κανόνος»*, και κυρίως οι ακουστικές προτάσεις της, θα μπορούσαν να είναι μια προσπάθεια «συμφιλίωσης της πυθαγόρειας με την αριστοξένεια σχολή, ή αλλιώς της μαθηματικής με την εμπειρική σχολή». Από την άλλη μεριά, ο Barker δεν επιχειρεί τη συμφιλίωση ανάμεσα στην πυθαγόρεια και την αριστοξένεια μουσική θεωρία και εντοπίζει «μερικές τεράστιες διαφωνίες». Ο Βοήθειος υποστηρίζει ότι, στην αρχαιότητα, η πυθαγόρεια και η αριστοξένεια θεωρία ήταν ασυμβίβαστες, τουλάχιστον για πολλούς.

Ωστόσο, εύλογα αναδύονται κάποια ερωτήματα στο νου του Barbera: γιατί ο Νικόμαχος δεν αναφέρεται ούτε στην *«Κατατομή Κανόνος»* αλλά ούτε και στον Ευκλείδη στο έργο του *«Εγχειρίδιο των Αρμονικών»*; Γιατί ο Πτολεμαίος, ο οποίος αποδίδει τις μουσικές θεωρίες στον Αρχύτα, τον Αριστόξενο, τον Ερατοσθένη και τον Δίδυμο, συνδέει τη βασική αρχή της συμφωνίας που περιλαμβάνεται στην εισαγωγή της *«Κατατομής Κανόνος»* με τους Πυθαγορείους παρά με τον Ευκλείδη; Ίσως ο Πορφύριος και ο Βοήθειος συνέθεσαν την πραγματεία και η ημερομηνία της

σύνθεσης μπορεί να είναι κατοπινή του 4ου π.Χ. αιώνα. Θα μπορούσε, επίσης, κανείς να εικάσει ότι η *«Κατατομή Κανόνος»* είναι ένα προϊόν της Πυθαγόρειας ή της νεοπυθαγόρειας αναγέννησης της ύστερης αρχαιότητας κι ότι η πραγματεία πήρε τη μορφή που γνωρίζουμε στα χρόνια μετά τον Πορφύριο.

Η γνώμη του Barbera για την εισαγωγή της *«Κατατομής Κανόνος»* είναι ότι πρόκειται για το πιο σημαντικό πυθαγόρειο κείμενο για τη μουσική θεωρία, διότι εκεί διαβάζουμε το πυθαγόρειο δόγμα πάνω στις αρμονικές. Ο συγγραφέας της εισαγωγής παρατηρεί ότι οι γρήγοροι παλμοί [πληγαί] παράγουν υψηλούς τόνους κι ότι οι αραιοί παλμοί παράγουν χαμηλούς τόνους. Κατά τον Barker, ωστόσο, αν κάποιος υποθέσει ότι η πρόταση αφορά σε μήκη χορδής, τότε πρέπει να συμβεί μια αριθμητική ψευδο-αντιστροφή, δηλαδή οι μεγάλου μήκους χορδές παράγουν χαμηλούς τόνους, ενώ οι μικρού μήκους χορδές παράγουν υψηλούς τόνους. Βέβαια, με εξαίρεση τα δύο τελευταία θεωρήματα, δεν είναι απαραίτητο οι χορδές να είναι το αντικείμενο της συζήτησης. Η *«Κατατομή Κανόνος»* καταπιάνεται με διαστήματα, είτε αυτά είναι μαθηματικά ή αριθμητικά, είτε είναι μουσικά. Από την άλλη, τα σχέδια γραμμών που υπάρχουν στα χειρόγραφα αναπαριστούν χορδές κι αυτό μπορεί να μας παραπλανήσει. Αν και οι δύο τελευταίες προτάσεις πράγματι αφορούν τη διαίρεση μιας χορδής, δεν χρησιμοποιούν αριθμούς στις αποδείξεις τους. Επιπλέον, αυτές οι δύο αποδείξεις έχουν μια ανεπαίσθητη σχέση με τις υπόλοιπες της πραγματείας, όπως έχουν παρατηρήσει σχεδόν όλοι οι μελετητές του έργου. Ο Van der Waerden συνόψισε την κατάσταση, σημειώνοντας ότι «όταν έχουμε να κάνουμε με πυθαγόρεια κείμενα, θα πρέπει να έχουμε κατά νου ότι οι λόγοι αναπαριστούν την έννοια των διαστημάτων και όχι απαραίτητα λόγους παλμών ή λόγους μηκών χορδών».

Στη συνέχεια, ο Barbera σχολιάζει την παρατήρηση του Barker γύρω από την πρόταση 11 του έργου και τον παραλογισμό που, κατ' εκείνον, ενέχει. Η απόδειξη της πρότασης αυτής βασίζεται στην παρατήρηση ότι, από τη στιγμή που το διάστημα της διπλής τετάρτης (8:3) δεν είναι σύμφωνο, δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσιο. Στην εισαγωγή ο συγγραφέας ισχυρίζεται ότι όλα τα σύμφωνα διαστήματα είναι είτε επιμόρια είτε πολλαπλάσια, αλλά όχι ότι όλα τα πολλαπλάσια διαστήματα είναι σύμφωνα – κι αυτή η τελευταία θέση απαιτείται για την απόδειξη της πρότασης 11.

Ως προς τις αδυναμίες που εντοπίζει ο Barker στο έργο, ο Barbera ισχυρίζεται τα εξής: πρώτα απ' όλα, το σύστημα που χρησιμοποιείται στην *«Κατατομή Κανόνος»* είναι ένα σύστημα δύο οκτάβων. Αν και η *«Κατατομή Κανόνος»* δεν είναι σαφής πάνω στο θέμα, οι περισσότερες μουσικές θεωρίες στην αρχαιότητα, και κυρίως η Πυθαγόρεια, περιορίζονται στο σύστημα των δύο οκτάβων. Σ' αυτό το σύστημα, όλοι οι πολλαπλάσιοι λόγοι είναι σύμφωνοι. Γι' αυτό, αν η διπλή τετάρτη (8:3) δεν είναι σύμφωνη, τότε δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσια.

Δεύτερον, εκτός από τον περιορισμό στο σύστημα των δύο οκτάβων, η *«Κατατομή Κανόνος»* περιορίζεται και αριθμητικά στους αριθμούς της τετρακτύος 1, 2, 3 και 4, όταν τίθεται το θέμα της συμφωνίας. Πληθώρα πυθαγορείων κειμένων από την αρχαιότητα ορίζουν ως σύμφωνα μόνο εκείνα τα διαστήματα που συντίθεται συσχετίζοντας οποιουσδήποτε δύο όρους της τετρακτύος. Το αποτέλεσμα αυτού του ορισμού είναι ο περιορισμός, στο σύστημα των δύο οκτάβων, του πλήθους των συμφωνιών σε πέντε (τετάρτη, πέμπτη, οκτάβα, οκτάβα και μια πέμπτη, διπλή οκτάβα) και των κατηγοριών των λόγων σε πολλαπλάσιους και επιμόριους (4:2= 2:1, 3:1, 2:1, 3:2, 4:3).

Όσον αφορά το διάστημα της οκτάβας και μια τετάρτη (8:3), και σύμφωνα με τον Barbera, ο Barker ισχυρίζεται ότι η *«Κατατομή Κανόνος»* σιωπά, όμως πλανάται όταν ισχυρίζεται ότι «κανείς δεν φαίνεται να έχει αμφισβητήσει» το σύνθετο χαρακτήρα αυτού του σύνθετου διαστήματος. Ο Barker συνεχίζει λέγοντας ότι η απόρριψη εκ μέρους των Πυθαγορείων αυτού του διαστήματος από την κατηγορία των συμφωνιών «είναι καθαρά αθέμιτη», γιατί η βάση της είναι αριθμητική και όχι ακουστική – το 8:3 δεν είναι ούτε πολλαπλάσιο ούτε επιμόριο, αλλά πολλαπλάσιο επιμερές. Το επιχείρημα του Barker στηρίζεται στο γεγονός ότι η οκτάβα και μια τετάρτη ακούγεται σύμφωνη. Από τη στιγμή που η *«Κατατομή Κανόνος»* προσδιορίζει τις συμφωνίες σε μια ακουστική βάση, ο Barker την κρίνει που δεν συμπεριλαμβάνει το διάστημα 8:3 στις συμφωνίες. Η συμφωνία ή μη ενός διαστήματος, ωστόσο, είναι σχετικό θέμα και εξαρτάται τόσο από την αισθητηριακή αντίληψη, όσο και από το σύστημα. Ο σύμφωνος χαρακτήρας του 8:3 δεν είναι σε καμία περίπτωση βέβαιος και το θέμα αυτό αποτέλεσε αντικείμενο πολλών συζητήσεων. Οι Αριστοξένειοι και ο Πτολεμαίος το είχαν εντάξει μεταξύ των σύμφωνων διαστημάτων, αλλά η κριτική του Πτολεμαίου για τη μη αποδοχή του 8:3 ως σύμφωνου διαστήματος δείχνει ότι οι αρχαίοι θεωρητικοί δεν αντιμετώπιζαν ομόφωνα το θέμα. Αντίθετα με την *«Κατατομή Κανόνος»*, ο Βοήθειος και ο Πλούταρχος απορρίπτουν κατηγορηματικά την οκτάβα και μια τετάρτη, διότι δεν είναι σύμφωνο διάστημα. Σε κάποιους Πυθαγορείους το διάστημα ακουγόταν μη σύμφωνο γιατί ο αριθμητικός του χαρακτηρισμός όχι μόνο περιελάμβανε τον αριθμό 8, ο οποίος δεν υπήρχε μέσα στην τετρακτύ, αλλά ήταν λόγος πολλαπλάσιος επιμερής, δηλαδή ανήκε στο είδος των λόγων που ήταν το πιο απομακρυσμένο από την ομορφιά της μονάδας και της ισότητας. Η ορθόδοξη πυθαγόρεια θέση στο θέμα είναι ακριβώς η αντίθετη από αυτή του Barker: η οκτάβα και μια τετάρτη δεν ακούγεται σύμφωνη, γιατί όλες οι συμφωνίες είναι είτε πολλαπλάσιες είτε επιμόριες.

Ο Barbera καταλήγει στο συμπέρασμα ότι πρέπει να κρατούμε την πυθαγόρεια παράδοση στο μυαλό μας, όταν διαβάζουμε την *«Κατατομή Κανόνος»*. Το γεγονός ότι η εισαγωγή αποτελεί ένα έρεισμα για την κατασκευή της πυθαγόρειας θεωρίας της μουσικής δεν αμφισβητείται. Όμως, αυτά τα θεμέλια

πρέπει να υποστηριχθούν με το επιπλέον πυθαγόρειο δόγμα που αφορά την τετρακτύ. Επιπλέον, όλη η πραγματεία πρέπει να διαβαστεί με το σύστημα των δύο οκτάβων κατά νου.

Το ύφος και η γλώσσα στην *«Κατατομή Κανόνος»* μοιάζουν με τα αντίστοιχα των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη και δύσκολα μπορεί να υπάρξει αμφιβολία για το γεγονός ότι το έργο ανήκει στον Ευκλείδη. Από την άλλη μεριά, είναι επικίνδυνο να περιμένει κανείς από την *«Κατατομή Κανόνος»* μια καθαρή και γενική θεωρία της ακουστικής, όμοια με αυτή που θεμελίωσε ο Ευκλείδης για τη γεωμετρία. Στα *«Στοιχεία»* βρίσκουμε μια αφηρημένη θεωρία της γεωμετρικής και αριθμητικής αλήθειας, που εφαρμόζεται αμερόληπτα στο φυσικό κόσμο. Με την *«Κατατομή Κανόνος»*, η διάκριση ανάμεσα στο υλικό και το άυλο, είτε μεταξύ ήχου και αριθμού είτε μεταξύ ήχου και γραμμής, δεν είναι ξεκάθαρη. Η σχέση ανάμεσα στον αριθμό και τον ήχο αποτελούσε θαύμα και μυστήριο για τους Πυθαγορείους.

Σύμφωνα με τον Andrew Barbera, η *«Κατατομή Κανόνος»* θα πρέπει να διαβάζεται από την οπτική των Πυθαγορείων. Παρά το «ευκλείδειο» ύφος της, προτείνει να την προσεγγίζουμε από τη μεριά του Νικόμαχου ή του Θέωνα του Σμυρνέα, παρά από αυτή του Ευκλείδη.

Στη συνέχεια παραθέτουμε το έργο με την εισαγωγή, τις είκοσι προτάσεις και κάποια σχόλια. Τα τελευταία, ανήκουν κατά κύριο λόγο στο μουσικό, φυσικό και καθηγητή της Μουσικής Ακουστικής και Πληροφορικής του Πανεπεστημίου Αθηνών, Χ. Σπυρίδη, ο οποίος και επιμελήθηκε τη δημοσίευση αυτού του έργου. Όσα σχόλια, δε, δεν φέρουν την υπογραφή του Χ. Σπυρίδη, ανήκουν στον Andrew Barker, όπως αυτός τα κατέγραψε στο βιβλίο του *«Greek Musical Writings»* και στο άρθρο του *«Methods and Aims in the Euclidean Sectio Canonis»*.

ΤΟ ΕΡΓΟ

Εισαγωγή

«Εἰ ἡσυχία εἴη καὶ ἀκινησία, σιωπὴ ἂν εἴη· σιωπῆς δὲ οὔσης καὶ μηδενὸς κινουμένου οὐδὲν ἂν ἀκούοιτο· εἰ ἄρα μέλλει τι ἀκουσθήσεσθαι, πληγὴν καὶ κίνησιν πρότερον δεῖ γενέσθαι. ὥστε, ἐπειδὴ πάντες οἱ φθόγγοι γίνονται πληγῆς τινος γινομένης, πληγὴν δὲ ἀμήχανον γενέσθαι μὴ οὐχὶ κινήσεως πρότερον γενομένης, –τῶν δὲ κινήσεων αἱ μὲν πυκνότεραί εἰσιν, αἱ δὲ ἀραιότεραι, καὶ αἱ μὲν πυκνότεραι ὀξυτέρους ποιοῦσι τοὺς φθόγγους, αἱ δὲ ἀραιότεραι βαρυτέρους, –ἀναγκαῖον τοὺς μὲν ὀξυτέρους εἶναι, ἐπείπερ ἐκ πυκνοτέρων καὶ πλειόνων σύγκεινται κινήσεων, τοὺς δὲ βαρυτέρους, ἐπείπερ ἐξ ἀραιοτέρων καὶ ἐλασσόνων σύγκεινται κινήσεων. ὥστε τοὺς μὲν ὀξυτέρους τοῦ δέοντος ἀνιεμένους ἀφαιρέσει κινήσεως τυγχάνειν τοῦ δέοντος, τοὺς δὲ βαρυτέρους ἐπιτεινομένους προσθέσει κινήσεως τυγχάνειν τοῦ δέοντος. διόπερ ἐκ μορίων τοὺς φθόγγους συγκεῖσθαι φατέον, ἐπειδὴ προσθέσει καὶ ἀφαιρέσει τυγχάνουσι τοῦ δέοντος. πάντα δὲ τὰ ἐκ μορίων συγκείμενα ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεται πρὸς ἄλληλα, ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους· τῶν δὲ ἀριθμῶν οἱ μὲν ἐν πολλαπλασίῳ λόγῳ λέγονται, οἱ δὲ ἐν ἐπιμορίῳ, οἱ δὲ ἐν ἐπιμερεῖ, ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν τοῖς τοιούτοις λόγοις λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους. τούτων δὲ οἱ μὲν πολλαπλάσιοι καὶ ἐπιμόριοι ἑνὶ ὀνόματι λέγονται πρὸς ἀλλήλους.

Γινώσκομεν δὲ καὶ τῶν φθόγγων τοὺς μὲν συμφώνους ὄντας, τοὺς δὲ διαφώνους, καὶ τοὺς μὲν συμφώνους μίαν κρᾶσιν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦντας, τοὺς δὲ διαφώνους οὔ. τούτων οὕτως ἐχόντων εἰκὸς τοὺς συμφώνους φθόγγους, ἐπειδὴ μίαν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦνται κρᾶσιν τῆς φωνῆς, εἶναι τῶν ἐν ἑνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους λεγομένων ἀριθμῶν, ἤτοι πολλαπλασίους ὄντας ἢ ἐπιμορίους.»

Μετάφραση

«Αν υπήρχε ησυχία και ακινησία, θα υπήρχε σιωπή. Όταν, λοιπόν, υπάρχει σιωπή και τίποτα δεν κινείται, τίποτα δεν ακούγεται. Άρα, εάν κάτι πρόκειται να γίνει ακουστό, πρέπει προηγουμένως να υπάρξει κτύπημα και κίνηση[1]. Ώστε, επειδή όλοι οι φθόγγοι παράγονται από κάποια κρούση που συμβαίνει και η κρούση δεν είναι δυνατόν να συμβεί χωρίς προηγουμένως να υπάρξει κίνηση – από τις κινήσεις δε, άλλες μεν είναι πυκνότερες, άλλες δε είναι αραιότερες και οι μεν πυκνότερες (κινήσεις) παράγουν οξύτερους φθόγγους, οι δε αραιότερες (κινήσεις παράγουν) τους βαρύτερους (φθόγγους) - είναι απαραίτητο οι μεν να είναι οξύτεροι μόνο και μόνο επειδή συνίστανται από πυκνότερες και περισσότερες κινήσεις, οι δε να είναι

βαρύτεροι, μόνο και μόνο επειδή συνίστανται από αραιότερες και μικρότερες (με την έννοια του «λιγότερες» κινήσεις)[2].

Ώστε οι μεν οξύτεροι του πρέποντος (φθόγγοι), χαλαρούμενοι[3] με αφαίρεση κινήσεως να καθίστανται οι πρέποντες, οι δε βαρύτεροι (φθόγγοι) τεινόμενοι[3] με πρόσθεση κινήσεως να καθίστανται οι πρέποντες. Γι' αυτόν το λόγο πρέπει να λεχθεί ότι οι φθόγγοι συνίστανται από μόρια, επειδή με πρόσθεση και αφαίρεση (μορίων) καθίστανται οι πρέποντες.

Όλα όσα δεν συνίστανται από μόρια εκφράζονται μεταξύ τους με έναν αριθμητικό λόγο[4] (μια αριθμητική σχέση), ώστε είναι απαραίτητο και οι φθόγγοι με έναν αριθμητικό λόγο να εκφράζονται μεταξύ τους. Από τους αριθμούς, άλλοι μεν σχετίζονται με λόγο πολλαπλάσιο, άλλοι δε με λόγο επιμόριο και άλλοι με λόγο επιμερή[5], ώστε είναι απαραίτητο και οι σχέσεις των φθόγγων να εκφράζονται με τέτοιους λόγους αριθμών. Από αυτούς δε (τους αριθμούς) η σχέση μεταξύ των πολλαπλασίων (αριθμών) και των επιμορίων (αριθμών) προφέρεται μονολεκτικά[6].

Επιπροσθέτως, γνωρίζουμε ότι από τους φθόγγους άλλοι μεν είναι σύμφωνοι, άλλοι δε διάφωνοι και οι μεν σύμφωνοι φθόγγοι μια κράση (ένα σύνθετο ήχο) οι δυο τους δημιουργούν, οι δε διάφωνοι όχι.

Έτσι εχόντων των πραγμάτων (των σχετικών με τους φθόγγους), είναι φυσικό οι σύμφωνοι φθόγγοι, επειδή οι δυο τους δημιουργούν μια κράση φωνής (ένα σύνθετο ήχο), να εκφράζονται με αριθμούς που η μεταξύ τους σχέση προφέρεται μονολεκτικά, δηλαδή αυτούς που είναι πολλαπλάσιοι ή επιμόριοι[7]».

<u>ΣΧΟΛΙΑ</u>

1. Αυτές οι φράσεις δείχνουν τη σαφή επιρροή του συγγραφέα από τον Αρχύτα, η οποία είναι εμφανής σε όλο το έργο, ιδιαιτέρως στην πρόταση 3 (Barker).

2. Πολλοί άλλοι συγγραφείς στρέφουν την προσοχή τους στο γεγονός ότι συνεχείς ήχοι παράγονται από μια σειρά διακριτών κρούσεων ενός σώματος (π.χ. μιας παλλόμενης χορδής στον αέρα) κι ότι οι κρούσεις είναι πιο πυκνές ή συχνές στην περίπτωση μιας υψηλής νότας. Κανείς τους όμως δεν ισχυρίζεται ότι η μεγάλη συχνότητα των κρούσεων είναι αυτή που προκαλεί τον υψηλό τόνο. Η μεγαλύτερη συχνότητα μπορεί απλά να θεωρηθεί ως το αίτιο της μεγάλης ταχύτητας κι είναι σαφές ότι οι υψηλότεροι τόνοι παράγονται λόγω μεγαλύτερης ταχύτητας διάδοσης. Μόνο ο παρών συγγραφέας αρθρώνει την άποψη ότι η συχνότητα των κρούσεων είναι υπεύθυνη για τον τόνο μιας νότας. Περισσότερες και πιο «πυκνές» κινήσεις παράγουν υψηλότερους ήχους απ' ότι λιγότερες και πιο «αραιές».

3. Κατά τον συγγραφέα, οι ήχοι αποτελούνται από μέρη (μόρια), «επειδή με πρόσθεση και αφαίρεση (μορίων) καθίστανται οι πρέποντες». Οι ήχοι διαφορετικών τόνων θα πρέπει να μπορούν να συσχετιστούν μεταξύ τους μέσω αριθμητικών λόγων, από τη στιγμή που όλα τα πράγματα που συντίθεται από μέρη συσχετίζονται με αυτόν τον τρόπο. Στη μουσική των Ελλήνων, ο όρος «μόριον» σημαίνει «λόγος». Μάλιστα, αν κανείς μελετήσει βαθιά τον Ευκλείδη, διατηρώντας αναλλοίωτους τους ορισμούς και αντικαθιστώντας μόνο τον όρο «μόριο» με τη λέξη «Hertz» (μονάδα μέτρησης της συχνότητας των ήχων), παίρνει ορισμούς πλήρεις και ακόλουθους με αυτούς που υπάρχουν στη σύγχρονη Φυσική.

Οι μετοχές «χαλαρούμενοι» και «τεινόμενοι» έχουν την έννοια του «κατεβάζω τον τόνο» και «ανεβάζω τον τόνο» αντίστοιχα κι επομένως μπορούν να εφαρμοστούν τόσο σε νότες όσο και σε χορδές. Η παρούσα θέση είναι ότι το «χαλάρωμα» μιας χορδής «χαλαρώνει» τη νότα (κατεβάζει τον τόνο), μειώνοντας την ταχύτητα των κινήσεων μπρος – πίσω της χορδής και κατ' επέκταση ελαττώνοντας τη συχνότητα των κρούσεών της με τον αέρα.

4. Ένα ελκυστικό σημείο στη θεωρία του συγγραφέα είναι ότι η μεταβλητή με την οποία ορίζεται ο τόνος διαφοροποιείται με τρόπο διακριτό και όχι συνεχή. Σε μια δεδομένη στιγμή, μια παλλόμενη χορδή κτυπά τον αέρα τόσες φορές όσες εκφράζει ένας ολόκληρος αριθμός κι η σχέση μεταξύ των κρούσεων – συχνοτήτων δύο παλλόμενων χορδών μπορεί να εκφρασθεί ως ο λόγος δύο ολόκληρων αριθμών. Έτσι δεν μπορεί να εμφανιστεί κάποια ποσότητα η οποία να μην εκφράζεται με ολόκληρους αριθμούς. Ενδεικτική φράση για τα παραπάνω είναι η φράση «αριθμητικός λόγος».

5. Οι πολλαπλάσιοι λόγοι είναι της μορφής mn:n. Οι επιμόριοι λόγοι έχουν τη μορφή (n+1):n. Η γενική μορφή των επιμερών λόγων είναι (n+m):n, όπου το m είναι μεγαλύτερο από το 1 και είτε ισούται με το n, είτε είναι πολλαπλάσιό του.

6. Αυτή η φράση έχει ερμηνευθεί με πολλούς τρόπους. Κατά μια άποψη, η φράση «από αυτούς» αναφέρεται στους λόγους και υπάρχει ένα μονολεκτικό όνομα που αναφέρεται από κοινού στους πολλαπλάσιους και τους επιμόριους λόγους, όμως ο συγγραφέας δεν προσδιορίζει αυτό το όνομα. Κάποιοι, όπως για παράδειγμα ο Πορφύριος, δίνουν την ονομασία «δυνατότερος» ή «καλύτερος», όχι όμως ως τίτλο αλλά ως περιγραφή. Ύστερα ο συγγραφέας περνά αμέσως στις συμφωνίες και τις ασυμφωνίες. «Οι μεν σύμφωνοι φθόγγοι μια κράση (ένα σύνθετο ήχο) οι δυο τους δημιουργούν, οι δε διάφωνοι όχι». Καταλήγει ότι για το λόγο αυτό θα πρέπει να περιμένουμε ότι οι λόγοι των συμφωνιών θα είναι όλοι είτε πολλαπλάσιοι είτε επιμόριοι, λόγω του κοινού χαρακτηριστικού αυτών των δύο κατηγοριών.

Η ασάφεια, η λακωνικότητα και η επιχειρηματολογική αδυναμία του κειμένου προκαλούν τις υποψίες του von Jan. Ο Barker συμφωνεί με τον von Jan στο σημείο ότι αυτό το κείμενο δεν είναι η δουλειά του σχολαστικού συγγραφέα των προτάσεων. Ωστόσο, αυτό το κείμενο περιέχει, αν και σε ανολοκλήρωτη μορφή, την ουσία του ακόλουθου συμπεράσματος. Λαμβάνεται ρητά ως δεδομένο σε μερικές προτάσεις και, επιπλέον, θα κατέρεε όλο το έργο με την απουσία του.

Ο Barker χαρακτηρίζει ασαφή την εξής πρόταση: «τούτων δὲ οἱ μὲν πολλαπλάσιοι καὶ ἐπιμόριοι ἑνὶ ὀνόματι λέγονται πρὸς ἀλλήλους». Το επιχείρημα για το γεγονός ότι οι συμφωνίες θα πρέπει πάντα να ανήκουν σε μια από αυτές τις δύο κατηγορίες λόγων θα ήταν τότε ότι, από τη στιγμή που οι νότες κάθε συμφωνίας φτιάχνουν μια ενότητα, όλες οι συμφωνίες θα έπρεπε να ανήκουν σε μια και μοναδική κατηγορία λόγων. Ο von Jan παρατηρεί ότι ο συγγραφέας δεν μας λέει ποιο είναι το μοναδικό όνομα της κατηγορίας που περικλείει τα δύο είδη λόγων. Το θέμα, όμως, δεν είναι ουσιαστικά αυτό. Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι οι συγκεκριμένοι λόγοι έχουν ένα και μοναδικό όνομα εξαιτίας ενός ιδιαιτέρου κοινού χαρακτηριστικού τους, αλλά ακόμα κι αυτό δεν θα είχε αξία αν δεν υπήρχε ένας τρόπος συσχέτισης του κοινού χαρακτηριστικού των συμφωνιών με το κοινό χαρακτηριστικό των λόγων.

Υπάρχει ένας ακόμη τρόπος να στηρίξει κανείς το επιχείρημα περί ασάφειας σχετικά με τους λόγους. Ο Barker ερμηνεύει την παραπάνω πρόταση ως εξής: «από αυτούς τους αριθμούς, αυτοί που βρίσκονται σε πολλαπλάσιο ή επιμόριο λόγο σχετίζονται μεταξύ τους κάτω από μοναδική ονομασία». Δηλαδή, ενώ στα ελληνικά ένας επιμερής λόγος, όπως το 5:3, μπορεί να προσδιοριστεί μόνο από σύνθετα ονόματα όπως το «πέντε προς τρία», οι πολλαπλάσοι και οι επιμόριοι λόγοι έχουν μια μονολεκτική ονομασία. Όσον αφορά τους πολλαπλάσιους λόγους, αυτοί είναι απλοί και ξεκάθαροι: ο λόγος 2:1 καλείται «διπλάσιος», ο 3:1 «τριπλάσιος» κ.ο.κ. Σχετικά με τους επιμόριους, ο λόγος 3:2 λέγεται «ημιόλιος» και όλοι οι υπόλοιποι ονομάζονται με την πρόθεση «επί» και ένα τακτικό επίθετο, λόγου χάρη ο λόγος 4:3 καλείται «επίτριτος», το 9:8 «επόγδοος» κ.λ.π. Αν αυτό εννοεί στην πραγματικότητα ο συγγραφέας, έτσι εξηγείται αυτό που αποκαλεί ως «μοναδικό όνομα». Δεν υπάρχει ένα και μοναδικό όνομα για όλους τους πολλαπλάσιους και τους επιμόριους λόγους, υπάρχει όμως συγκεκριμένο όνομα για καθέναν από αυτούς. Οι συμφωνίες είναι ενοποιήσεις δύο στοιχείων. Οι λόγοι μερικών κλάσεων «ενοποιούν» τους δύο αριθμούς, οι οποίοι αποτελούν τα στοιχεία τους, σε κάτι ενιαίο, το οποίο προσδιορίζεται από μοναδικό όνομα, αντί να χαρακτηρίζεται από εκφράσεις του τύπου «πέντε προς τρία». Θα περιμέναμε ότι οι λόγοι των συμφωνιών θα είχαν «ενοποιητικά» ονόματα, από τη στιγμή που οι ίδιες οι συμφωνίες μας παρουσιάζονται ως ενοποιήσεις νοτών. Έτσι, θα περιμέναμε οι συμφωνίες να είναι πολλαπλάσιες ή επιμόριες, όχι όμως επιμερείς, κι αυτό γιατί οι

επιμερείς λόγοι δεν μπορούν να εκφρασθούν παρά ως σχέσεις μεταξύ ζευγών διακεκριμένων και ανεξάρτητων όρων.

7. Τελικά ο Barker καταλήγει στα εξής συμπεράσματα: α) Η σχέση μεταξύ δύο νοτών που διαφέρουν τονικά εκφράζεται ως λόγος αριθμών, β) δύο νότες που διαφέρουν τονικά αλλά σχηματίζουν μια συμφωνία έχουν μια τέτοια σχέση, ώστε να συνίσταται από αυτές μια μοναδική ενότητα, γ) ο λόγος ανάμεσα στους δύο αριθμούς εκφράζεται ως μια ενότητα, η οποία φέρει μονολεκτικό όνομα, αν και μόνο αν σχηματίζουν πολλαπλάσιο ή επιμόριο λόγο.

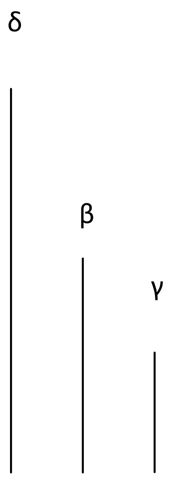
ΠΡΟΤΑΣΗ 1

«Ἐὰν διάστημα πολλαπλάσιον δὶς συντεθὲν ποιῇ τι διάστημα, καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἔσται»

«ἔστω διάστημα τὸ ΒΓ, καὶ ἔστω πολλαπλάσιος ὁ Β τοῦ Γ, καὶ γεγενήσθω, ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Δ· φημὶ δὴ τὸν Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιον εἶναι. ἐπεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Γ πολλαπλάσιός ἐστι, μετρεῖ ἄρα ὁ Γ τὸν Β. ἦν δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὥστε μετρεῖ ὁ Γ καὶ τὸν Δ. πολλαπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Γ.»

Μετάφραση

Εάν ένα πολλαπλάσιο διάστημα λαμβανόμενο δύο φορές δημιουργεί κάποιο νέο διάστημα, τότε αυτό το νέο διάστημα θα είναι πολλαπλάσιο[8].



Έστω το διάστημα βγ και έστω ότι ο β είναι πολλαπλάσιος του γ. Έστω επίσης ότι έχει ληφθεί ο β προς τον δ με την ίδια σχέση που έχει ο γ προς τον β. Τότε λέγω ότι ο δ είναι πολλαπλάσιος του γ. Διότι , επειδή ο β είναι πολλαπλάσιος του γ, άρα ο γ διαιρεί ακριβώς τον β[9]. Είχε ληφθεί, όμως, ο β προς τον δ με την ίδια σχέση που είχε ο γ προς τον β. Ώστε ο γ διαιρεί ακριβώς και τον δ. Άρα ο δ είναι πολλαπλάσιος του γ.

Με την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων

Έστω βγ ένα πολλαπλάσιο διάστημα και έστω ότι ο β είναι πολλαπλάσιος του γ. Τότε:

$\beta = \kappa\gamma, \;\; \kappa \in \mathrm{N}$

Έστω επίσης ότι το δ έχει με το β την ίδια σχέση με αυτή που έχει το β με το γ. Τότε:

$\delta = \kappa\beta, \;\; \kappa \in \mathrm{N}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Το δγ είναι πολλαπλάσιο διάστημα, δηλαδή:

$\delta = \lambda\gamma, \;\; \lambda \in \mathrm{N}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΥ:

$\left.\begin{matrix} \beta = \kappa\gamma \\ \delta = \kappa\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \delta = \kappa(\kappa\gamma) \Rightarrow \delta = \kappa^2\gamma$ και αφού $\kappa \in \mathrm{N} \Rightarrow \kappa^2 \in \mathrm{N} \Rightarrow \kappa^2 = \frac{\delta}{\gamma} = \lambda \in \mathrm{N}$,

τελικά $\delta = \lambda\gamma, \;\; \lambda \in \mathrm{N}$.

ΣΧΟΛΙΑ

8. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι πρώτες εννιά προτάσεις δεν εισάγουν μουσικά δεδομένα και θεωρούνται καθαρά μαθηματικές. Έτσι, η έκφραση «διάστημα» δεν θα πρέπει να εκλαμβάνεται εδώ ως μουσικός όρος, αλλά δηλώνει την «απόσταση», τον «χωρισμό» και εφαρμόζεται εξίσου σε σχέσεις μεταξύ δύο μηκών ή δύο αριθμών (Barker).

Τα παρακάτω σχόλια φέρουν την υπογραφή του Χ. Σπυρίδη:

Σύμφωνα με τον Νικόμαχο, «διάστημα δ' ἐστὶ δυοῖν φθόγγων μεταξύτης», δηλαδή [διάστημα είναι ό,τι υπάρχει ανάμεσα σε δύο φθόγγους].

Ένας «Ανώνυμος» συγγραφέας στο *«De Musica Scripta Bellermanniana»* λέει: «διάστημα δ' ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο φθόγγων ἀνομοίων τῇ τάσει, τοῦ μὲν ὀξυτέρου, τοῦ δὲ βαρυτέρου», δηλαδή [διάστημα είναι εκείνο που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε [ή περικλείεται από] δύο νότες διαφορετικές στο ύψος, από τις οποίες η μία είναι ψηλότερη και η άλλη χαμηλότερη].

Ο Κλεονείδης στο *«Introductio Harmonica»* δίνει τον εξής ορισμό για το διάστημα: «διάστημα δὲ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο φθόγγων ἀνομοίων ὀξύτητι καὶ βαρύτητι», δηλαδή [διάστημα είναι η απόσταση που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο νότες διαφορετικές στο ύψος και στο βάθος]

Αξίζει να γίνει αναφορά στη διάκριση των διαστημάτων σε «άρτια» και «περιττά», η οποία γινόταν ανάλογα με τον αριθμό των διέσεων που περιελάμβαναν. Λόγου χάρη, το ημιτόνιο και ο τόνος ήταν άρτια, γιατί περιείχαν δύο και τέσσερις διέσεις αντίστοιχα (κάθε δίεση είναι ίση προς ένα τέταρτο του τόνου), ενώ το διάστημα ανάμεσα στην παρυπάτη και τη λιχανό (τρία τέταρτα του τόνου) ήταν περιττό, γιατί περιείχε τρεις διέσεις.

Μια και αναφερθήκαμε στον όρο «δίεση», ας μιλήσουμε λεπτομερέστερα γι' αυτόν. Κατ' αρχήν, ο όρος αυτός προέρχεται από το ρήμα «δίημι», που σημαίνει διαπερνώ, αφήνω κάτι να περάσει. Επομένως, δίεση σημαίνει τη διέλευση, τη διαβίβαση. Στη μουσική ήταν όρος με πολλές σημασίες. Για πολλούς θεωρητικούς σήμαινε το ένα τέταρτο του τόνου και ονομαζόταν «δίεσις τεταρτημόριος».

Ο Θέων ο Σμηρναίος λέει ότι δίεση είναι, σύμφωνα με τη σχολή του Αριστόξενου, το τέταρτο του τόνου, ενώ για τους Πυθαγορείους δίεση ονομαζόταν το ημιτόνιο.

Ο Αριστόξενος στο *«Elementa Harmonica»*, αναφέρει ότι «οὔτε γὰρ ἡ φωνὴ διέσεως τῆς ἐλαχίστης ἔλαττον ἔτι διάστημα δύναται διασαφεῖν οὐδ' ἡ ἀκοὴ διαισθάνεσθαι», δηλαδή [η φωνή δεν μπορεί να διακρίνει, ούτε η ακοή να ξεχωρίσει, οποιοδήποτε διάστημα μικρότερο από την πιο μικρή δίεση]. Αυτό σημαίνει ότι, κατά τον Αριστόξενο, δίεση είναι το ελάχιστο διάστημα που μπορεί να εκτελέσει η φωνή και να συλλάβει το αυτί.

Ο Αριστείδης στο *«De Musica»* λέει ότι «δίεση ήταν το ελάχιστο διάστημα της φωνής».

Ο Νικόμαχος στο *«Harmonicum Enchiridion»* αναφέρει ότι: «δίεσις, ὅπερ ἐστὶν ἡμιτονίου ἥμισυ», δηλαδή ότι [η εναρμόνιος δίεση είναι το μισό του ημιτονίου], ενώ ο Γαυδέντιος αναφέρει ότι [η εναρμόνιος δίεση είναι το τέταρτο του τόνου]. Κατά τον τελευταίο, η ελάχιστη χρωματική δίεση (η δίεση που χρησιμοποιείται στο χρωματικό γένος) ισούται με 1/3 του τόνου (δίεσις τριτημόριος). Η «ημιόλιος δίεσις» είναι η δίεση που χρησιμοποιείται στο ημιόλιο χρωματικό γένος και είναι ίση με μια και μισή εναρμόνια δίεση. Οπότε, αφού η εναρμόνια δίεση είναι 1/4 του τόνου, η ημιόλια θα είναι 1/4 + 1/8 = 3/8 του τόνου.

Ο δε Κλεονείδης λέει: «Ας υποθέσουμε πως ο τόνος διαιρείται σε δώδεκα ελάχιστα μόρια, το καθένα από τα οποία ονομάζεται δωδεκατημόριο (1/12)... το ημιτόνιο θα είναι 6/12 και η δίεση, η λεγόμενη «τεταρτημόριος» (ένα τέταρτο του τόνου) θα έχει 3/12 και η «τριτημόριος» (ένα τρίτο του τόνου) θα έχει 4/12».

Όσον αφορά τον όρο «γένος», ισχύουν τα παρακάτω:

Γένος : Όρος που σήμαινε τη διάφορη διάταξη των διαστημάτων στη σύσταση ενός τετραχόρδου ή ενός πιο μεγάλου διαστήματος, του οποίου το τετράχορδο είναι συστατικό μέρος. Κατά τον Αριστείδη Κοϊντιλιανό: «Γένος είναι κάποια διαίρεση του τετραχόρδου». Ο Κλεονείδης υποστηρίζει ότι: «Γένος είναι κάποια διαίρεση τεσσάρων φθόγγων».

Τα γένη ήταν τρία: το «διατονικόν ή διάτονον», το «χρωματικόν ή χρώμα» και το «εναρμόνιον ή αρμονία». Το διατονικό ήταν το πρώτο που χρησιμοποιήθηκε, θεωρούνταν το πιο φυσικό και μπορούσε να τραγουδηθεί ακόμη κι από εκείνους που ήταν εντελώς απαίδευτοι. Στο γένος αυτό, γινόταν χρήση τόνων και ημιτονίων. Το δε όνομα αυτού προέρχεται από το ρήμα διατείνω (τεντώνω). Το χρωματικό γένος χρησιμοποιήθηκε αργότερα και θεωρούνταν το πιο τεχνικό [τεχνικώτατον] και μπορούσε να εκτελεστεί μόνο από μουσικά καλλιεργημένους ανθρώπους. Χαρακτηριστικό συστατικό στοιχείο του χρωματικού γένους ήταν το διάστημα ενός τόνου και μισού. Το εναρμόνιο γένος ήταν το τελευταίο που χρησιμοποιήθηκε. Θεωρούνταν εξαιρετικά δύσκολο, χρειαζόταν σημαντική πρακτική εξάσκηση και ήταν σχεδόν αδύνατο για τους πολλούς. Σε αυτό το γένος, γινόταν χρήση τετάρτων του τόνου.

9. Δηλαδή το μήκος του β μπορεί να διαιρεθεί, ή να μετρηθεί, κατά έναν ολόκληρο αριθμό φορών από το μήκος του γ. Αλλιώς, αν ο β και ο γ θεωρηθούν αριθμοί, τότε ο γ είναι παράγοντας του β.

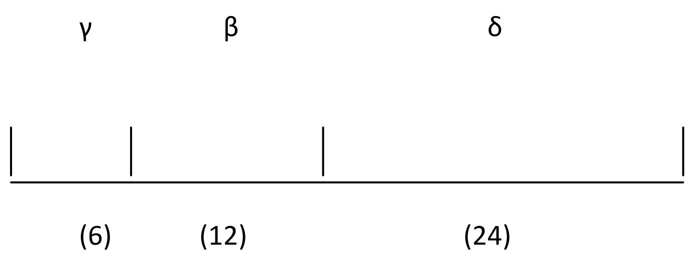
ΠΡΟΤΑΣΗ 2

«Ἐὰν διάστημα δὶς συντεθὲν τὸ ὅλον ποιῇ πολλαπλάσιον, καὶ αὐτὸ ἔσται πολλαπλάσιον.»

«ἔστω διάστημα τὸ ΒΓ, καὶ γεγενήσθω, ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔστω ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· φημὶ καὶ τὸν Β τοῦ Γ εἶναι πολλαπλάσιον. ἐπεὶ γὰρ ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιός ἐστι, μετρεῖ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ. ἐμάθομεν δέ, ὅτι, ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὁποσοιοῦν, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ, καὶ τοὺς μεταξὺ μετρήσει. μετρεῖ ἄρα ὁ Γ τὸν Β· πολλαπλάσιος ἄρα ὁ Β τοῦ Γ.»

Μετάφραση

Εάν ένα διάστημα, λαμβανόμενο δύο φορές, δημιουργεί ένα ολικό διάστημα πολλαπλάσιο, τότε και αυτό το (αρχικό) διάστημα θα είναι πολλαπλάσιο.



Έστω το διάστημα βγ (εννοεί μια σχέση μεταξύ των δύο ευθυγράμμων τμημάτων β και γ) και ας ληφθεί ο β προς τον δ με την ίδια σχέση που έχει ο γ προς τον β και έστω ότι ο δ είναι πολλαπλάσιος του γ. Ισχυρίζομαι ότι και ο β είναι πολλαπλάσιος του γ διότι, επειδή ο δ είναι πολλαπλάσιος του γ, συμπεραίνουμε ότι ο γ διαιρεί ακριβώς τον δ. Μάθαμε[10], όμως, ότι εάν υπάρχουν οσοιδήποτε αριθμοί σε αναλογία στην οποία ο πρώτος (αριθμός [εννοεί τον πρώτο «άκρο» όρο της αναλογίας]) διαιρεί ακριβώς τον τελευταίο (αριθμό [εννοεί τον τελευταίο «άκρο» όρο της αναλογίας]), τότε θα διαιρεί ακριβώς και (όλους) τους ενδιάμεσους αριθμούς (εννοεί τους «μέσους» όρους της αναλογίας). Άρα ο γ διαιρεί ακριβώς τον β και, κατά συνέπεια, ο β είναι πολλαπλάσιος του γ.

<u>Αλγεβρική απόδειξη (Χ. Σπυρίδης)</u>

Έστω η αναλογία

$$\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\beta}{\delta}=\lambda,\ \ \lambda\in \mathrm{N}$$

και έστω ότι ο δ είναι πολλαπλάσιος του γ, οπότε:

$$\delta=\kappa\gamma,\ \ \kappa\in \mathrm{N}$$

$$\left.\begin{matrix}\beta=\lambda\delta\\ \delta=\kappa\gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow \beta=\lambda\kappa\gamma\Rightarrow\frac{\beta}{\gamma}=\lambda\kappa,\ \ \lambda\kappa\in \mathrm{N}$$

Άρα ο γ διαιρεί ακριβώς τον β, οπότε ο β είναι πολλαπλάσιος του γ.

<u>*ΣΧΟΛΙΑ* (Χ. Σπυρίδης)</u>

10. Στο βιβλίο VIII των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη

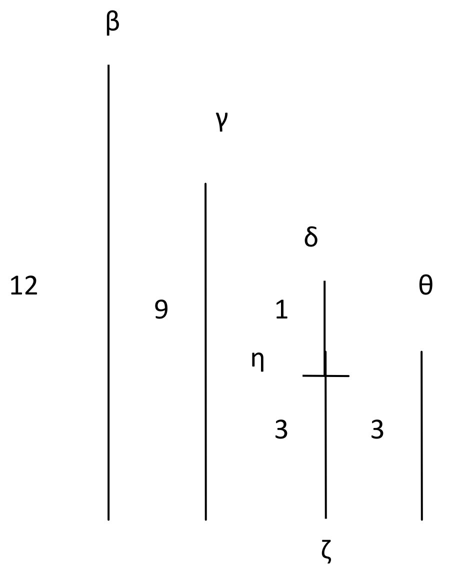
ΠΡΟΤΑΣΗ 3

«Ἐπιμορίου διαστήματος οὐδεὶς μέσος, οὔτε εἷς οὔτε πλείους, ἀνάλογον ἐμπεσεῖται ἀριθμός.»

«ἔστω γὰρ ἐπιμόριον διάστημα τὸ ΒΓ· ἐλάχιστοι δὲ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς Β, Γ ἔστωσαν οἱ ΔΖ, Θ. οὗτοι οὖν ὑπὸ μονάδος μόνης μετροῦνται κοινοῦ μέτρου. ἄφελε ἴσον τῷ Θ τὸν ΗΖ καὶ ἐπεὶ ἐπιμόριός ἐστιν ὁ ΔΖ τοῦ Θ, ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΗ κοινὸν μέτρον τοῦ τε ΔΖ καὶ τοῦ Θ ἐστι· μονὰς ἄρα ὁ ΔΗ· οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς ΔΖ, Θ μέσος οὐδείς. ἔσται γὰρ ὁ ἐμπίπτων τοῦ ΔΖ ἐλάττων, τοῦ δὲ Θ μείζων, ὥστε τὴν μονάδα διαιρεῖσθαι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς ΔΖ, Θ τις. ὅσοι δὲ εἰς τοὺς ἐλαχίστους μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. οὐδεὶς δὲ εἰς τοὺς ΔΖ, Θ ἐμπεσεῖται, οὐδὲ εἰς τοὺς Β, Γ ἐμπεσεῖται.»

Μετάφραση

Σε επιμόριο διάστημα κανένας μέσος ανάλογος, ούτε ένας ούτε περισσότεροι μέσοι ανάλογοι αριθμοί παρεμβάλλονται.



Έστω το επιμόριο διάστημα βγ. Οι ελάχιστοι αριθμοί[11] που έχουν τον ίδιο λόγο με τους βγ έστω ότι είναι οι δζ, θ. Αυτοί, λοιπόν, οι αριθμοί έχουν ως μόνον κοινό διαιρέτη τη μονάδα. Αφαίρεσε τον ηζ, που είναι ίσος προς τον θ. Και, επειδή ο δζ είναι επιμόριος του θ, η διαφορά δη αποτελεί κοινό διαιρέτη και του δζ και του θ. Συνεπώς, ο δη είναι ίσος με τη μονάδα. Άρα, λοιπόν, στους αριθμούς δζ, θ δεν μπορεί να παρεμβληθεί κανένας μέσος (ανάλογος αριθμός). Διότι (στην ενάντια περίπτωση) ο παρεμβαλλόμενος (μέσος ανάλογος αριθμός) θα πρέπει να είναι μικρότερος από το δζ και μεγαλύτερος από το θ, με αποτέλεσμα να υποδιαιρείται η μονάδα[12]. Γεγονός αδύνατο. Συνεπώς, δεν παρεμβάλλεται στους αριθμούς δζ, θ κάποιος αριθμός. Όσοι δε μέσοι ανάλογοι παρεμβάλλονται στους ελάχιστους αριθμούς, τόσοι (σε πλήθος) μέσοι ανάλογοι παρεμβάλλονται και στους αριθμούς, που έχουν τον ίδιο λόγο μ’ αυτούς[13]. Αφού κανένας (μέσος ανάλογος) δεν παρεμβάλλεται

στους δζ, θ, κανένας (μέσος ανάλογος) δεν παρεμβάλλεται και στους (αριθμούς) β,γ.

Απόδειξη με βάση τον ορισμό του «επιμορίου αριθμού» (Χ. Σπυρίδης)

Έχουμε ότι:

$$\beta : \gamma = (n+1) : n$$
$$\delta\zeta : \theta = (n+1) : n$$

Με βάση την Πρόταση 19 του Ευκλείδη περί συγκρίσεως λόγων ισχύει: $\frac{\delta\zeta - \theta}{\theta} = \frac{n+1-n}{n} \Rightarrow \frac{\delta\zeta - \theta}{\theta} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\eta\delta}{\theta} = \frac{1}{n}$

Έστω τώρα ότι υπάρχει κάποιος μέσος ανάλογος αριθμός, ο x, τέτοιος ώστε:

$$\theta < x < \delta\zeta$$

$$\frac{x}{\theta} = \frac{n+1}{n}$$

Επειδή, όμως, ισχύει ότι:

$$\frac{\delta\zeta}{\theta} = \frac{n+1}{n}$$

προκύπτει ότι

$$x = \delta\zeta$$

ΑΤΟΠΟ.

Μια άτυπη εναλλακτική απόδειξη (Χ. Σπυρίδης)

Έστω β και γ οι μικρότεροι ακέραιοι που βρίσκονται σε επιμόριο λόγο. Τότε:

$$\beta - \gamma = 1$$

και οι β και γ είναι διαδοχικοί ακέραιοι. Έστω τώρα ότι υπάρχει μέσος ανάλογος αριθμός, ο x, μεταξύ τους. Τότε:

$$\beta : x = x : \gamma$$

$$\frac{\beta}{x} = \frac{x}{\gamma}$$

Έτσι:

$x^2 = \beta \cdot \gamma$

Οπότε ο x είναι το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών του β και του γ. Δηλαδή και ο β και ο γ θα πρέπει να έχουν ρητή τετραγωνική ρίζα, ΑΤΟΠΟ γιατί δεν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί που να έχουν κι οι δύο ρητές τετραγωνικές ρίζες.

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

11. Στο σημείο αυτό ο Ευκλείδης υπονοεί την «απλοποίηση» των όρων του λόγου, ώστε να προκύψει λόγος «ανάγωγος» (όρος ο οποίος δημιουργήθηκε από τον Χαράλαμπο Σπυρίδη, έχοντας κατά νου τον όρο «ανάγωγο κλάσμα»).

Δηλαδή, εάν είναι

$\beta = \lambda \cdot \delta\zeta$

$\gamma = \lambda \cdot \theta,\ \lambda \in \mathrm{N} \Rightarrow \lambda \cdot \delta\zeta : \lambda \cdot \theta = \delta\zeta : \theta$, σύμφωνα με την Πρόταση 15 από το βιβλίο V των *«Στοιχείων»*, το οποίο περιλαμβάνει τη θεωρία των λόγων και των αναλογιών. Εφαρμογή αυτών έχουμε στα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων που δίνονται από τον Ευκλείδη. Πράγματι:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{12}{9} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{3}{3} \cdot \frac{3+1}{3} = \frac{3+1}{3}$$

Οι αριθμοί 3+1 και 3 καλούνται «ελάχιστοι εν τω αυτώ λόγω τοις αριθμοίς 12 και 9».

12. Ο Ευκλείδης και όλοι οι Έλληνες μαθηματικοί δεν θεωρούν το λόγο δύο μεγεθών ως αριθμό, διότι αριθμούς θεωρούσαν μόνο τους ακεραίους (το σύνολο Ν των σημερινών φυσικών αριθμών), ενώ ο λόγος μπορεί να είναι και κλασματικός και ασύμμετρος. Αφού, λοιπόν, ο μικρότερος «αριθμός» γι’ αυτούς είναι η μονάδα, δεν μπορεί να προκύψει άλλος «αριθμός» με την υποδιαίρεση της μονάδας.

14. Η απόδειξη βρίσκεται στο βιβλίο VIII των *«Στοιχείων»*

ΠΡΟΤΑΣΗ 4

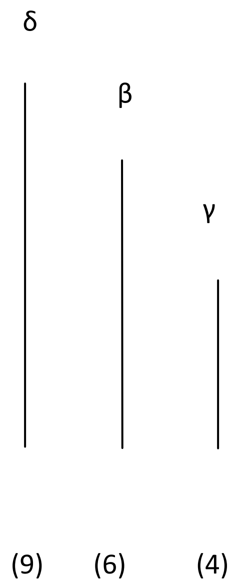
«Ἐὰν διάστημα μὴ πολλαπλάσιον δὶς συντεθῇ, τὸ ὅλον οὔτε πολλαπλάσιον ἔσται οὔτε ἐπιμόριον.»

«ἔστω γὰρ διάστημα μὴ πολλαπλάσιον τὸ ΒΓ, καὶ γεγενήσθω, ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Δ· λέγω, ὅτι ὁ Δ τοῦ Γ οὔτε πολλαπλάσιος οὔτε ἐπιμόριός ἐστιν. ἔστω γὰρ πρῶτον ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος. οὐκοῦν ἐμάθομεν, ὅτι, ἐὰν

διάστημα δὶς συντεθὲν τὸ ὅλον ποιῇ πολλαπλάσιον, καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιόν ἐστιν. ἔσται ἄρα ὁ Β τοῦ Γ πολλαπλάσιος. οὐκ ἦν δέ. ἀδύνατον ἄρα τὸν Δ τοῦ Γ εἶναι πολλαπλάσιον. ἀλλὰ μὴν οὐδ' ἐπιμόριον. ἐπιμορίου γὰρ διαστήματος μέσος οὐδεὶς ἀνάλογον ἐμπίπτει. εἰς δὲ τοὺς Δ, Γ ἐμπίπτει ὁ Β. ἀδύνατον ἄρα τὸν Δ τοῦ Γ ἢ πολλαπλάσιον ἢ ἐπιμόριον εἶναι»

Μετάφραση

Εάν ένα μη πολλαπλάσιο διάστημα ληφθεί δύο φορές, το ολικό (διάστημα που σχηματίζεται) δεν θα είναι ούτε πολλαπλάσιο ούτε επιμόριο.



Έστω το βγ ένα διάστημα μη πολλαπλάσιο και έστω ότι έχει ληφθεί ο β προς τον δ να έχει την ίδια σχέση, που έχει ο γ προς τον β. Ισχυρίζομαι (λέγω) ότι ο δ δεν είναι ούτε πολλαπλάσιος ούτε επιμόριος του γ.

Διότι έστω κατά πρώτον ότι είναι ο δ πολλαπλάσιος του γ. Μάθαμε, όμως, ότι εάν ένα διάστημα συντιθέμενο δύο φορές δημιουργεί ολικό διάστημα πολλαπλάσιο, τότε και αυτό (το αρχικό διάστημα) θα είναι πολλαπλάσιο[14]. Κατά συνέπεια ο β θα είναι πολλαπλάσιος του γ, που δεν ήταν. Άρα είναι αδύνατον ο δ να είναι πολλαπλάσιος του γ. Αλλά ούτε επιμόριος θα μπορούσε να είναι. Διότι σε επιμόριο διάστημα κανένας μέσος ανόλογος (αριθμός) δεν παρεμβάλλεται16, ενώ στους δγ παρεμβάλλεται ο β. Άρα είναι αδύνατον ο δ να είναι είτε πολλαπλάσιος είτε επιμόριος του γ.

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

14. Από την Πρόταση 2

15. Από την Πρόταση 3

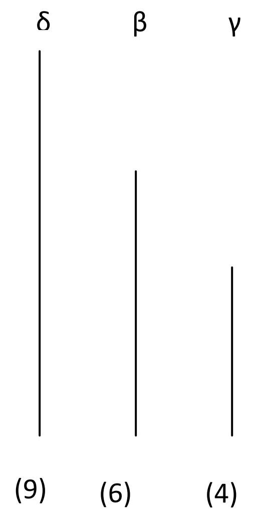
ΠΡΟΤΑΣΗ 5

«Ἐὰν διάστημα δὶς συντεθὲν τὸ ὅλον μὴ ποιῇ πολλαπλάσιον, οὐδ' αὐτὸ ἔσται πολλαπλάσιον.»

«ἔστω γὰρ διάστημα τὸ ΒΓ, καὶ γεγενήσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Δ, καὶ μὴ ἔστω ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ Β τοῦ Γ ἔσται πολλαπλάσιος. εἰ γάρ ἐστιν ὁ Β τοῦ Γ πολλαπλάσιος, ἔσται ἄρα ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος. οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ὁ Β τοῦ Γ ἔσται πολλαπλάσιος.»

Μετάφραση

Εάν ένα διάστημα, που προστιθέμενο δύο φορές δεν δημιουργεί ολικό (διάστημα) πολλαπλάσιο, ούτε και αυτό (το αρχικό διάστημα) θα είναι πολλαπλάσιο.



Διότι έστω το διάστημα βγ και έστω ότι έχει ληφθεί ο β προς τον δ με την ίδια σχέση που έχει ληφθεί ο γ προς τον β και έστω ότι ο δ δεν είναι πολλαπλάσιος του γ. Ισχυρίζομαι (λέγω) ότι ούτε ο β θα είναι πολλαπλάσιος του γ.

Διότι, εάν είναι ο β πολλαπλάσιος του γ, θα είναι ο δ πολλαπλάσιος του γ. Δεν είναι, όμως. Άρα, λοιπόν, ο β δεν είναι πολλαπλάσιος του γ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6

«Τὸ διπλάσιον διάστημα ἐκ δύο τῶν μεγίστων ἐπιμορίων συνέστηκεν, ἔκ τε τοῦ ἡμιολίου καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτρίτου.»

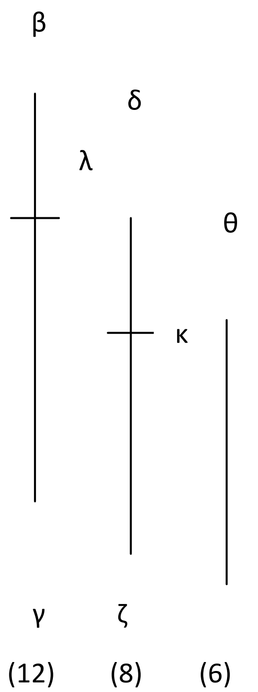
«ἔστω γὰρ ὁ μὲν ΒΓ τοῦ ΔΖ ἡμιόλιος, ὁ δὲ ΔΖ τοῦ Θ ἐπίτριτος· φημὶ τὸν ΒΓ τοῦ Θ διπλάσιον εἶναι. ἀφεῖλον γὰρ ἴσον τῷ Θ τὸν ΖΚ καὶ τῷ ΔΖ τὸν ΓΛ. οὐκοῦν ἐπεὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΔΖ ἡμιόλιος, ὁ ΒΛ ἄρα τοῦ ΒΓ τρίτον μέρος ἐστίν, τοῦ δὲ ΔΖ ἥμισυ. πάλιν ἐπεὶ ὁ ΔΖ τοῦ Θ ἐπίτριτός ἐστιν, ὁ ΔΚ τοῦ μὲν ΔΖ τεταρτημόριον, τοῦ δὲ Θ τριτημόριον. οὐκοῦν ἐπεὶ ὁ ΔΚ τοῦ ΔΖ ἐστι τεταρτημόριον, ὁ δὲ ΒΛ τοῦ ΔΖ ἥμισυ, τοῦ ἄρα ΒΛ ἥμισυ ἔσται ὁ ΔΚ. ἦν δὲ ὁ ΒΛ τοῦ ΒΓ τρίτον μέρος·

ὁ ἄρα ΔΚ τοῦ ΒΓ ἕκτον μέρος ἐστίν. ἦν δὲ ὁ ΔΚ τοῦ Θ τρίτον μέρος· ὁ ἄρα ΒΓ τοῦ Θ διπλάσιός ἐστιν.

Ἄλλως. Ἔστω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β ἡμιόλιος, ὁ δὲ Β τοῦ Γ ἐπίτριτος· λέγω, ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐστι διπλάσιος. Ἐπεὶ γὰρ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ Α τοῦ Β, ὁ Α ἄρα ἔχει τὸν Β καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. δύο ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶ τρισὶ τοῖς Β. πάλιν ἐπεὶ ὁ Β τοῦ Γ ἐστιν ἐπίτριτος, ὁ Β ἄρα ἔχει τὸν Γ καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ. τρεῖς ἄρα οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τέτταρσι τοῖς Γ. τρεῖς δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶ δυσὶ τοῖς Α. δύο ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶ τέτταρσι τοῖς Γ. ὁ ἄρα Α ἴσος ἐστὶ δυσὶ τοῖς Γ· διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ»

Μετάφραση

Το διπλάσιο διάστημα[16] έχει συντεθεί από τα δύο μέγιστα επιμόρια διαστήματα, αυτό του ημιολίου και αυτό του επίτριτου.



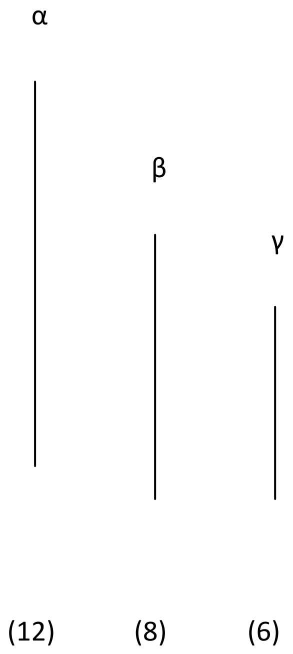
Διότι έστω ότι ο μεν βγ είναι ημιόλιος του δζ, ο δε δζ είναι επίτριτος του θ. Ισχυρίζομαι (λέγω) ότι ο βγ είναι διπλάσιος του θ.

Διότι αφήρεσα τους ζκ, που είναι ίσος προς τον θ, και τον γλ, που είναι ίσος προς τον δζ.

Επειδή, λοιπόν, ο βγ είναι ημιόλιος του δζ, ο βλ, συνεπώς, θα είναι το $\frac{1}{3}$ του βγ (καθώς επίσης θα είναι) το $\frac{1}{2}$ του δζ. Πάλι, επειδή ο δζ είναι επίτριτος του θ, ο δκ θα είναι, αφενός μεν το $\frac{1}{4}$ του δζ, αφετέρου δε το $\frac{1}{3}$ του θ.

Επειδή, λοιπόν, ο δκ είναι το $\frac{1}{4}$ του δζ, ο δε βλ το $\frac{1}{2}$ του δζ, κατά συνέπεια ο δκ θα είναι το $\frac{1}{2}$ του βλ. Ήταν, όμως, ο βλ το $\frac{1}{3}$ του βγ. Συνεπώς, ο δκ είναι το $\frac{1}{6}$ του βγ. Ήταν δε ο δκ το $\frac{1}{3}$ του θ. Άρα ο βγ είναι διπλάσιος του θ[17].

Απόδειξη με άλλον τρόπο (Χ. Σπυρίδης):



Έστω, λοιπόν, ο μεν α ημιόλιος του β, ο α, κατά συνέπειαν, θα εμπεριέχει τον β και το $\frac{1}{2}$ του β. Άρα δύο φορές ο α θα ισούται με τρεις φορές τον β. Πάλι, επειδή ο β είναι επίτριτος του γ, ο β, συνεπώς, εμπεριέχει τον γ και το $\frac{1}{3}$ του γ. Άρα τρεις φορές ο β ισούται με τέσσερις φορές τον γ. Άρα ο α είναι ίσος με δύο φορές τον γ. Άρα ο α είναι διπλάσιος του γ [19,20].

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

16. Διπλάσιο διάστημα είναι η διαπασών (ή δια πασών των χορδών συμφωνία), δηλαδή η οκτάβα. Κατά τον Βακχείο, την διαπασών φανερώνουν (δείχνουν) ο προσλαμβανόμενος και η μέση [δηλαδή η 8η], ενώ για τον Αριστοτέλη η ογδόη ήταν η πιο τέλεια συμφωνία. Με τον τελευταίο συμφωνεί και ο Πτολεμαίος, ο οποίος θεωρεί το διάστημα της ογδόης το πιο ωραίο και πιο ενωτικό. Ας σημειωθεί, επίσης, ότι ο όρος «διαπασών» αντικατέστησε, μετά την εποχή του Αριστόξενου, τον όρο «αρμονία». Ο Νικόμαχος γράφει: «ἆοἱ παλαιότατοι ἀπεφαίνοντο, ἁρμονίαν μὲν καλοῦντες τὴν διὰ πασῶνή», δηλαδή «την διαπασών την ονόμαζαν οι παλαιότεροι αρμονία».

17. Παρακάτω δίνεται η πρώτη απόδειξη με μαθηματικά σύμβολα:

Έστω κζ=θ και γλ=δζ

Αφού βγ ημιόλιος του δζ τότε:

$$\frac{\beta\gamma}{\delta\zeta}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{\beta\gamma-\delta\zeta}{\delta\zeta}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\beta\lambda}{\delta\zeta}=\frac{1}{2}\Rightarrow\beta\lambda=\frac{1}{2}\delta\zeta\,(\mathrm{I})$$

$$\frac{\beta\gamma}{\delta\zeta}=\frac{3}{2}\Rightarrow\delta\zeta=\frac{2}{3}\beta\gamma\Rightarrow\beta\gamma-\beta\lambda=\frac{2\beta\gamma}{3}\Rightarrow\beta\lambda=\beta\gamma-\frac{2\beta\gamma}{3}\Rightarrow\beta\lambda=\frac{1}{3}\beta\gamma(\mathrm{II})$$

Αφού δζ επίτριτος του θ τότε:

$$\frac{\delta\zeta}{\theta}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{\delta\zeta-\theta}{\theta}=\frac{4-3}{3}\Rightarrow\frac{\delta\kappa}{\theta}=\frac{1}{3}\Rightarrow\delta\kappa=\frac{1}{3}\theta(\mathrm{III})$$

$$\frac{\delta\zeta}{\theta}=\frac{4}{3}\Rightarrow\theta=\frac{3}{4}\delta\zeta\Rightarrow\delta\zeta-\delta\kappa=\frac{3}{4}\delta\zeta\Rightarrow\delta\kappa=\delta\zeta-\frac{3}{4}\delta\zeta\Rightarrow\delta\kappa=\frac{1}{4}\delta\zeta\ (\mathrm{IV})$$

Από (I), (IV) έχουμε ότι:

$$\delta\kappa=\frac{1}{2}\beta\lambda\,(V)$$

Από (II), (V) έχουμε ότι:

$$\delta\kappa=\frac{1}{6}\beta\gamma(VI)$$

Από (III), (VI) έχουμε ότι:

$$\beta\gamma=2\theta$$

18. Ομοίως και για τη δεύτερη απόδειξη:

α ημιόλιος του β

$$\Rightarrow\alpha=\beta+\frac{1}{2}\beta\Rightarrow\alpha=\frac{3}{2}\beta\Rightarrow 2\alpha=3\beta\,(I)$$

β επίτριτος του γ

$$\Rightarrow\beta=\gamma+\frac{1}{3}\gamma\Rightarrow\beta=\frac{4}{3}\gamma\Rightarrow 3\beta=4\gamma \quad \text{(II)}$$

Από (I) και (II) έχουμε ότι:

$$2\alpha=4\gamma\Rightarrow\alpha=2\gamma$$

Άρα ο α είναι διπλάσιος του γ.

19. Στο σημείο αυτό ο Πορφύριος προσθέτει μία ακόμη πρόταση:

«Κανένας πολλαπλάσιος λόγος δεν φτιάχνεται από επιμόριους λόγους, εκτός από το λόγο δύο».

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει πολλαπλάσιος λόγος αγ, ο οποίος φτιάχνεται από τους επιμόριους λόγους αβ και βγ. Έστω, επίσης, ότι ο δ είναι ημιόλιος του ε και ε ο επίτριτος του ζ, τότε ο δ είναι διπλάσιος του ζ. Αφού ο ημιόλιος λόγος είναι ο

μεγαλύτερος από τους επιμόριους και ο επίτριτος είναι ο δεύτερος, τότε είτε ο ένας από τους λόγους δε και εζ ισούται με έναν από τους λόγους αβ και βγ, είτε ο ένας ή και οι δύο από τους δε και εζ είναι μεγαλύτεροι από έναν ή και τους δύο από τους αβ και βγ. Όμως, σε κάθε περίπτωση, ο λόγος δζ είναι μεγαλύτερος από το λόγο αγ, ΑΤΟΠΟ, γιατί ο διπλός είναι ο μικρότερος από όλους τους πολλαπλάσιους λόγους. Άρα, δεν υπάρχει πολλαπλάσιος λόγος που να αποτελείται από δύο επιμόριους λόγους, εκτός από το λόγο δύο.

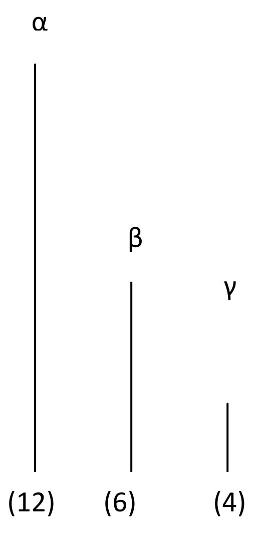
ΠΡΟΤΑΣΗ 7

«Ἐκ τοῦ διπλασίου διαστήματος καὶ ἡμιολίου τριπλάσιον διάστημα γίνεται»

«ἔστω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β διπλάσιος, ὁ δὲ Β τοῦ Γ ἡμιόλιος· λέγω, ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐστι τριπλάσιος. ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τοῦ Β ἐστι διπλάσιος, ὁ Α ἄρα ἴσος ἐστὶ δυσὶ τοῖς Β. πάλιν ἐπεὶ ὁ Β τοῦ Γ ἐστιν ἡμιόλιος, ὁ Β ἄρα ἔχει τὸν Γ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. δύο ἄρα οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τρισὶ τοῖς Γ. δύο δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τῷ Α. καὶ ὁ Α ἄρα ἴσος ἐστὶ τρισὶ τοῖς Γ. τριπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ»

Μετάφραση

Από το διπλάσιο διάστημα και το ημιόλιο (διάστημα) δημιουργείται τριπλάσιο διάστημα.



Έστω, λοιπόν, ότι ο μεν α είναι διπλάσιος του β, ο δε β είναι ημιόλιος του γ. Ισχυρίζομαι (λέγω) ότι ο α είναι τριπλάσιος του γ.

Διότι, επειδή ο α είναι διπλάσιος του β, συνεπάγεται ότι ο α είναι ίσος με δύο φορές το β. Επειδή πάλι ο β είναι ημιόλιος του γ, συνεπάγεται ότι ο β εμπεριέχει τον γ και το $\frac{1}{2}$ του γ. Άρα δύο φορές ο β ισούται με τρεις φορές τον γ. Δύο, όμως, φορές ο β ισούται με τον α. Και ο α, λοιπόν, είναι ίσος με τρεις φορές τον γ. Άρα ο α είναι τριπλάσιος του γ[20].

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

20. Παρακάτω δίνεται η απόδειξη με μαθηματικά σύμβολα:

Ο α είναι διπλπάσιος του β, άρα

$\alpha = 2\beta (I)$

Ο β είναι ημιόλιος του γ, άρα

$$\beta = \gamma + \frac{1}{2}\gamma \Rightarrow \beta = \frac{3}{2}\gamma \Rightarrow 2\beta = 3\gamma (II)$$

Από (I), (II) έχουμε ότι:

$\alpha = 3\gamma$

Άρα ο α είναι τριπλάσιος του γ.

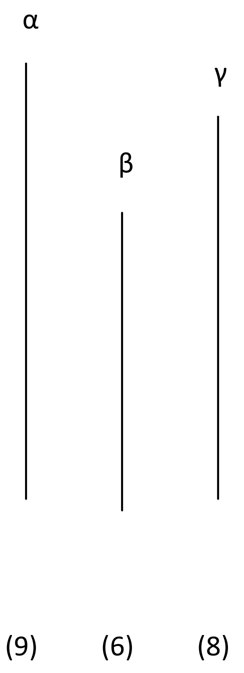
<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 8</u>

«Ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον.»

«ἔστω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β ἡμιόλιος, ὁ δὲ Γ τοῦ Β ἐπίτριτος· λέγω, ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐστὶν ἐπόγδοος. ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τοῦ Β ἐστιν ἡμιόλιος, ὁ Α ἄρα ἔχει τὸν Β καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. ὀκτὼ ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶ δώδεκα τοῖς Β. πάλιν ἐπεὶ ὁ Γ τοῦ Β ἐστὶν ἐπίτριτος, ὁ Γ ἄρα ἔχει τὸν Β καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ. ἐννέα ἄρα οἱ Γ ἴσοι εἰσὶ δώδεκα τοῖς Β, δώδεκα δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶν ὀκτὼ τοῖς Α· ὀκτὼ ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶν ἐννέα τοῖς Γ. ὁ Α ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ Γ καὶ τῷ ὀγδόῳ αὐτοῦ· ὁ Α ἄρα τοῦ Γ ἐστιν ἐπόγδοος.»

<u>Μετάφραση</u>

Εάν από ημιόλιο διάστημα αφαιρεθεί ένα επίτριτο διάστημα, το υπόλοιπο που απομένει είναι το επόγδοο (διάστημα).



Έστω, λοιπόν, ότι ο μεν α είναι ημιόλιος του β, ο δε γ είναι επίτριτος του β. Ισχυρίζομαι (λέγω) ότι ο α είναι επόγδοος του γ.

Διότι, επειδή ο α είναι ημιόλιος του β, συνεπάγεται ότι ο α εμπεριέχει τον β και το $\frac{1}{2}$ του β. Άρα οκτώ φορές ο α ισούται με δώδεκα φορές τον β. Επειδή, πάλι, ο γ είναι επίτριτος του β, ο γ εμπεριέχει τον β και το $\frac{1}{3}$ του β. Άρα εννέα φορές ο γ ισούται με δώδεκα φορές τον β. Όμως, δώδεκα φορές ο β ισούται με οκτώ φορές τον α. Άρα οκτώ φορές ο α ισούται με εννέα φορές τον

γ. Άρα ο α ισούται με τον γ και το $\frac{1}{8}$ του γ, συνεπώς ο α είναι επόγδοος του γ[21].

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

21. Παρακάτω δίνεται η απόδειξη με μαθηματικά σύμβολα:

Ο α είναι ημιόλιος τουβ, άρα

$$\alpha = \beta + \frac{1}{2}\beta \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\beta \Rightarrow 2\alpha = 3\beta \, (I)$$

Ο γ είναι επίτριτος του β, άρα

$$\gamma = \beta + \frac{1}{3}\beta \Rightarrow \gamma = \frac{4}{3}\beta \Rightarrow 3\gamma = 4\beta \, (II)$$

$$\left.\begin{array}{l} (\mathrm{I}) \Rightarrow 8\alpha = 12\beta \\ \\ (\mathrm{II}) \Rightarrow 9\gamma = 12\beta \end{array}\right\} \Rightarrow 8\alpha = 9\gamma \Rightarrow \alpha = \frac{9}{8}\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma + \frac{1}{8}\gamma$$

Άρα ο α είναι επόγδοος του γ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9

«Τὰ εξι ἐπόγδοα διαστήματα μείζονά ἐστι διαστήματος ἑνὸς διπλασίου»

«ἔστω γὰρ εἶς ἀριθμὸς ὁ Α. καὶ τοῦ μὲν Α ἐπόγδοος ἔστω ὁ Β, τοῦ δὲ Β ἐπόγδοος ὁ Γ, τοῦ δὲ Γ ἐπόγδοος ὁ Δ, τοῦ δὲ Δ ἐπόγδοος ὁ Ε, τοῦ Ε ἐπόγδοος ὁ Ζ, τοῦ Ζ ἐπόγδοος ὁ Η· λέγω, ὅτι ὁ Η τοῦ Α μείζων ἐστὶν ἢ διπλάσιος. ἐπεὶ ἐμάθομεν εὑρεῖν ἑπτὰ ἀριθμοὺς ἐπογδόους ἀλλήλων, εὑρήσθωσαν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, καὶ γίνεται

ὁ μὲν Α κϛ μύρια βρμδ,

ὁ δὲ Β κθ μύρια δϡιβ,

ὁ δὲ Γ λγ μύρια αψοϛ,

ὁ δὲ Δ λζ μύρια γσμη,

ὁ δὲ Ε μα μύρια θϡδ,

ὁ δὲ Ζ μζ μύρια βτϙβ,

ὁ δὲ Η νγ μύρια αυμα, καί ἐστιν ὁ Η τοῦ Α μείζων ἢ διπλάσιος»

Μετάφραση

Τα έξι επόγδοα διαστήματα είναι μεγαλύτερα από ένα διπλάσιο διάστημα.

Διότι, έστω ένας αριθμός, ο α, και έστω ότι του μεν α επόγδοος είναι ο β, του δε β επόγδοος είναι ο γ, του δε γ επόγδοος είναι ο δ, του δε δ επόγδοος είναι ο ε, του δε ε επόγδοος είναι ο ζ, του δε ζ επόγδοος είναι ο η.

Ισχυρίζομαι (λέγω) ότι ο η είναι μεγαλύτερος από τον διπλάσιο του α. Επειδή μάθαμε να βρίσκουμε επτά αριθμούς επόγδοους μεταξύ τους[22], έστω ότι βρέθηκαν οι α, β, γ, δ, ε, ζ, η και γίνεται (με την έννοια του «ας ληφθεί») ο μεν α 262144, ο δε β 294912, ο δε γ 331776, ο δε δ 373248, ο δε ε 419904, ο δε ζ 472392, ο δε η 531441 και είναι ο η μεγαλύτερος του α[23].

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

22. Είναι η Πρόταση 2 του βιβλίου VII των «Στοιχείων»

23. Με τη γλώσσα των μαθηματικών η απόδειξη είναι η εξής:

Έστω ένας αριθμός α και $\beta = \frac{9}{8}\alpha$

$$\gamma = \frac{9}{8}\beta \Rightarrow \gamma = \left(\frac{9}{8}\right)^2 \alpha$$

$$\delta = \frac{9}{8}\gamma \Rightarrow \delta = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \alpha$$

$$\varepsilon = \frac{9}{8}\delta \Rightarrow \varepsilon = \left(\frac{9}{8}\right)^4 \alpha$$

$$\zeta = \frac{9}{8}\varepsilon \Rightarrow \zeta = \left(\frac{9}{8}\right)^5 \alpha$$

$$\eta = \frac{9}{8}\zeta \Rightarrow \eta = \left(\frac{9}{8}\right)^6 \alpha$$

Ισχυρισμός: Ο η είναι μεγαλύτερος από τον 2α

Απόδειξη Ισχυρισμού: Κατ’ αρχήν,

$$\eta = \left(\frac{9}{8}\right)^6 \alpha \Rightarrow \eta = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^6 \alpha \Rightarrow \eta = \frac{3^{12}}{2^{18}}\alpha$$

Ο Ευκλείδης επέλεξε, για απλούστευση των μαθηματικών πράξεων, ως $\alpha = 2^{18} = 262144$. Τότε:

$$\beta = \frac{9}{8}\alpha = \frac{3^2}{2^3} \cdot 2^{18} = 3^2 \cdot 2^{15} = 294912$$

$$\gamma = \left(\frac{9}{8}\right)^2 \alpha = \frac{3^4}{2^6} \cdot 2^{18} = 3^4 \cdot 2^{12} = 331776$$

$$\delta = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \alpha = \frac{3^6}{2^9} \cdot 2^{18} = 3^6 \cdot 2^9 = 373248$$

$$\varepsilon = \left(\frac{9}{8}\right)^4 \alpha = \frac{3^8}{2^{12}} \cdot 2^{18} = 3^8 \cdot 2^6 = 419904$$

$$\zeta = \left(\frac{9}{8}\right)^5 \alpha = \frac{3^{10}}{2^{15}} \cdot 2^{18} = 3^{10} \cdot 2^3 = 472392$$

$$\eta = \left(\frac{9}{8}\right)^6 \alpha = \frac{3^{12}}{2^{18}} \cdot 2^{18} = 3^{12} = 531441$$

Τότε θα είναι:

$$2\alpha = 2 \cdot 262144 = 524288 < 631441 = \eta$$

Σήμερα, εξάλλου, γνωρίζουμε ότι το διάστημα των έξι επόγδοων

$$\left(\frac{9}{8}\right)^6 = 2{,}027 > 2$$

που είναι το διάστημα μιας οκτάβας.

Σύμφωνα με τον Barker, οι πρώτες εννιά προτάσεις (Π1 - Π9) έχουν ως σκοπό να παγιώσουν κάποιες βασικές αλήθειες για τους λόγους, χωρίς καμία αναφορά στα μουσικά φαινόμενα. Κρίνεται σκόπιμο να σημειωθούν δύο πράγματα. Πρώτον, σε τρεις περιπτώσεις (Π2, Π3 και Π9) ο συγγραφέας στηρίζεται σε αρχές και αποδείξεις που δεν περιγράφονται στο παρόν κείμενο. Κατά συνέπεια, η αποδεικτική εγκυρότητα των θεωρημάτων δεν μπορεί να εκτιμηθεί ολοκληρωτικά, εκτός κι αν αυτό γίνει με βάση το υπόβαθρο ενός πρότερου μαθηματικού συστήματος – έργου. Δεύτερον, θα πρέπει να σημειωθεί το γεγονός ότι υπάρχουν τρεις βασικοί λόγοι (2:1, 3:2 και 4:3). Ενώ, λοιπόν, στην Π6 παίρνουμε το γινόμενο των 3:2 και 4:3 και στην Π7 αυτό του 2:1 και του 3:2, δεν γίνεται καμία αναφορά στο γινόμενο των 2:1 και 4:3 (το οποίο φυσικά είναι το 8:3) κι αυτή η παράλειψη είναι

σημαντική. Μία πιθανή απάντηση στον Barker δόθηκε από τον Barbera και προαναφέρθηκε στα αρχικά σχόλια.

Ο Barker συνεχίζει λέγοντας ότι το επόμενο σύνολο προτάσεων χρησιμοποιεί τα μαθηματικά αποτελέσματα που προέκυψαν μέχρι εκεί και, επιπλέον, φέρει μουσικά στοιχεία και προβαίνει σε συμπεράσματα τα οποία σχετίζονται με μουσικά φαινόμενα. Οι Π10 – Π16 σχετίζονται με τους λόγους των σπουδαιότερων μουσικών διαστημάτων, πάνω στα οποία μπορεί να χτιστεί ολόκληρο το σύστημα μιας κλίμακας και αποδεικνύουν κάποιες ιδιότητες αυτών των διαστημάτων.

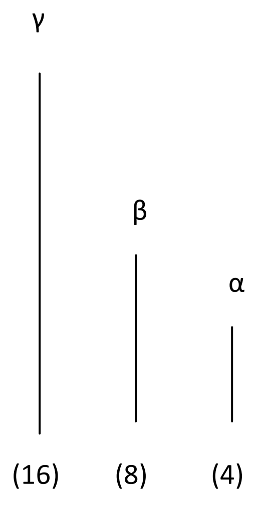
<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 10</u>

«Τὸ διὰ πασῶν διάστημά ἐστι πολλαπλάσιον.»

«ἔστω γὰρ νήτη μὲν ὑπερβολαίων ὁ Α, μέση δὲ ὁ Β, προσλαμβανόμενος δὲ ὁ Γ. τὸ ἄρα ΑΓ διάστημα δὶς διὰ πασῶν ὄν ἐστι σύμφωνον. ἤτοι οὖν ἐπιμόριόν ἐστιν ἢ πολλαπλάσιον. ἐπιμόριον μὲν οὐκ ἔστιν· ἐπιμορίου γὰρ διαστήματος μέσος οὐδεὶς ἀνάλογον ἐμπίπτει· πολλαπλάσιον ἄρα ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο <ἴσα> διαστήματα τὰ ΑΒ, ΒΓ συντεθέντα ποιεῖ πολλαπλάσιον τὸ ὅλον, καὶ τὸ ΑΒ ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον.»

<u>Μετάφραση</u>

Το διαπασών διάστημα είναι πολλαπλάσιο.



Διότι έστω[24] ότι ο μεν α είναι νήτη υπερβολαίων ο δε β είναι μέση και ότι ο γ είναι ο προσλαμβανόμενος. Άρα το διάστημα αγ[25], όντας δύο φορές το διαπασών (δις διαπασών), είναι σύμφωνο (διάστημα)[26]. Κατόπιν τούτου, λοιπόν, ή είναι διάστημα επιμόριο ή είναι διάστημα πολλαπλάσιο[27]. Πάντως επιμόριο διάστημα δεν είναι, διότι σε επιμόριο διάστημα κανένας μέσος ανάλογος αριθμός δεν παρεμβάλλεται[28]. Άρα είναι διάστημα πολλαπλάσιο. Επειδή, λοιπόν, δύο ίσα διαστήματα, τα αβ και βγ, συντιθέμενα δημιουργούν πολλαπλάσιο ολικό διάστημα, συνεπάγεται ότι και το διάστημα αβ είναι πολλαπλάσιο[29].

<u>*ΣΧΟΛΙΑ* (Χ. Σπυρίδης)</u>

24. Ονομασία και ονοματοθεσία.

Στην αρχαία ελληνική μουσική γινόταν χρήση ονομάτων για τον προσδιορισμό των φθόγγων. Αρχικά τα ονόματα δόθηκαν στις χορδές της λύρας σύμφωνα με τη θέση τους στο όργανο. Όταν η λέξη χορδή, με τη συνεχή και πρακτική χρήση, έγινε συνώνυμη του φθόγγου, τα ονόματα χρησιμοποιούνταν χωρίς διάκριση τόσο για τις χορδές, όσο και για τους αντίστοιχους φθόγγους. Από τον 6ο αι. π.Χ., όταν η επτάχορδη λύρα έγινε οκτάχορδη, τα ονόματα ήταν τα ακόλουθα:

Νήτη, νεάτη (=χαμηλότατη), η ψηλότερη νότα, όσον αφορά στο μουσικό της ύψος

Παρανήτη, η αμέσως πιο κάτω από τη νήτη

Τρίτη, η τρίτη από πάνω προς τα κάτω (όσον αφορά στο μουσικό ύψος)

Παραμέση, η πλαϊνή της μέσης προς τα πάνω (όσον αφορά στο μουσικό ύψος)

Μέση, η κεντρική νότα

Λιχανός, η χορδή που παιζόταν με το λιχανό, το δείκτη

Παρυπάτη, η πλαϊνή της υπάτης προς τα πάνω (όσον αφορά στο μουσικό ύψος)

Υπάτη (=υψίστη), η πιο χαμηλή νότα, όσον αφορά στο μουσικό της ύψος

Η παραπάνω ονοματολογία χρειάζεται κάποια επεξήγηση. Η νήτη, ενώ σήμαινε την έσχατη χορδή, ήταν στην πραγματικότητα η ψηλότερη χορδή. Αυτό οφείλεται στη θέση της χορδής νήτη, που ήταν τοποθετημένη στο πλησιέστερο σημείο προς τον εκτελεστή. Η υπάτη, ακριβώς το αντίθετο με τη νήτη, αλλά κατά παρόμοια αντιστοιχία, ενώ σήμαινε την πιο ψηλή χορδή, στην πραγματικότητα ήταν η χαμηλότερη, γιατί η αντίστοιχη χορδή ήταν τοποθετημένη στο άλλο άκρο, το πιο μακρινό από τον εκτελεστή.

Όσον αφορά τον προσλαμβανόμενο, πρόκειται για τον προστιθέμενο φθόγγο. Έτσι ονομαζόταν ο φθόγγος, η νότα, που προσέθεταν κάτω από το πιο χαμηλό τετράχορδο.

25. Ο β απέχει από τον γ δύο συνημμένα τετράχορδα κι έναν τόνο, ενώ ο α απέχει από τον γ κατά διάστημα δύο διαπασών. Με το συμβολισμό αγ υπονοείται το διάστημα που σχηματίζουν οι φθόγγοι α και γ, δηλαδή το διάστημα μεταξύ νήτης υπερβολαίων και προσλαμβανόμενου.

26. Από τον ίδιο τον Ευκλείδη, αλλά και από άλλους αρχαίους Έλληνες «αρμονικούς» συγγραφείς, μας σώζεται η πληροφορία ότι τα διαστήματα

«επίτριτον» («διά τεσσάρων»), «ημιόλιον» («διά πέντε»), «διά πασών» («οκτάβα»), «διά πασών και επίτριτον», «διά πασών και ημιόλιον» και «δις διαπασών» θεωρούνταν ως σύμφωνα διαστήματα.

27. Αυτή η παρατήρηση προέρχεται από την αρχή που διατυπώθηκε στο τέλος της εισαγωγής.

28. Από την Πρόταση 3. Η νότα μέση χωρίζει το διάστημα της διπλής οκτάβας στη μέση. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση ανάμεσα στον προσλαμβανόμενο και τη μέση είναι η ίδια με αυτή της μέσης με τη νήτη.

29. Από την Πρόταση 2.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11

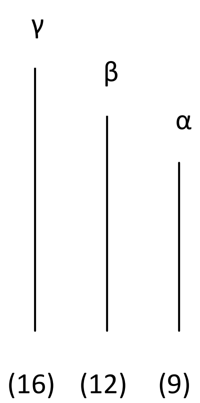
«Τὸ διὰ τεσσάρων διάστημα καὶ τὸ διὰ πέντε ἑκάτερον ἐπιμόριόν ἐστιν.»

«ἔστω γὰρ νήτη μὲν συνημμένων ὁ Α, μέση δὲ ὁ Β, ὑπάτη δὲ μέσων ὁ Γ. τὸ ἄρα ΑΓ διάστημα δὶς διὰ τεσσάρων ὄν ἐστι διάφωνον· οὐκ ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον.

ἐπεὶ οὖν δύο διαστήματα ἴσα τὰ ΑΒ, ΒΓ συντεθέντα τὸ ὅλον μὴ ποιεῖ πολλαπλάσιον, οὐδὲ ἄρα τὸ ΑΒ ἐστι πολλαπλάσιον. καί ἐστι σύμφωνον· ἐπιμόριον ἄρα. ἡ αὐτὴ δὲ ἀπόδειξις καὶ ἐπὶ τοῦ διὰ πέντε.»

Μετάφραση

Το διά τεσσάρων διάστημα[30] και το διαπέντε διάστημα[31] το καθένα τους είναι επιμόριο (διάστημα).



Διότι έστω ότι ο μεν α είναι νήτη συνημμένων, ο δε β είναι μέση και ότι ο γ είναι υπάτη μέσων. Άρα το διάστημα αγ, όντας «δις διατεσσάρων» (δηλαδή μεγέθους δύο τετραχόρδωνή δύο επίτριτων), είναι διάφωνο. Συνεπώς δεν είναι πολλαπλάσιο[32]. Επειδή, λοιπόν, δύο ίσα τμήματα τα αβ και βγ, συνενούμενα δημιουργούν ολικό διάστημα μη πολλαπλάσιο, συμπεραίνεται ότι ούτε το διάστημα αβ είναι πολλαπλάσιο[33]. Είναι και σύμφωνο. Άρα είναι επιμόριο. Η ίδια απόδειξη και για το διαπέντε διάστημα.

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

30. Η «διά τεσσάρων χορδών συμφωνία» είναι το διάστημα καθαρής τετάρτης που οι Πυθαγόρειοι ονόμαζαν «συλλαβή» ή «συλλαβά» (λόγος 4:3). Η λέξη συλλαβή

προέρχεται από το ρήμα συλλαμβάνω (=παίρνω μαζί, συνδέω) και γι' αυτό στη μουσική η συλλαβή ήταν μια ένωση ή συνδυασμός φθόγγων. Κατά τον Νικόμαχο, οι παλαιότατοι ονόμαζαν συλλαβά την τετάρτη, γιατί ήταν ο πρώτος συνδυασμός σύμφωνων φθόγγων.

31. Η «διά πέντε χορδών συμφωνία» είναι το διάστημα της καθαρής πέμπτης, το οποίο οι Πυθαγόρειοι ονόμαζαν «δι' οξειών» ή «διοξεία». Στο ένατο εγχειρίδιο, Νικόμαχος αναφέρεται στον ορισμό του Φιλολάου: «ἁρμονίας δὲ μέγεθος συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν. τὸ δὲ δι' ὀξειᾶν μεῖζον τᾶς συλλαβᾶς ἐπογδόῳ. ἔστι γὰρ ἀπὸ ὑπάτας εἰς μέσαν συλλαβὰ, ἀπὸ δὲ μέσας πότι νεάταν δι' ὀξειᾶν», δηλαδή [το μέγεθος της αρμονίας (της 8ης) είναι ίσο προς μια συλλαβή (διάστημα 3ης) και μια δι' οξειών (διάστημα 5ης), γιατί από την υπάτη ως τη μέση είναι μια 4η και από τη μέση ως τη νήτη είναι μια 5η].

32. Στο εν λόγω θεώρημα δηλώνεται ως επακόλουθο των όσων αναφέρθηκαν στην εισαγωγή του έργου ότι «το διάφωνο διάστημα δεν είναι πολλαπλάσιο». Με την προτασιακή άλγεβρα θα λέγαμε ότι:

Πρόταση 1: Το «διά τεσσάρων» διάστημα δεν είναι πολλαπλάσιο.

Πρόταση 2: Το «διά τεσσάρων» διάστημα είναι σύμφωνο, που συνεπάγεται ότι, είτε είναι επιμόριο, είτε ότι είναι πολλαπλάσιο, που το δεύτερο αποκλείεται από την Πρόταση 1.

Άρα το «διά τεσσάρων» διάστημα είναι επιμόριο.

33. Από την Πρόταση 5

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 12</u>

«Τὸ διὰ πασῶν διάστημά ἐστι διπλάσιον.»

«ἐδείξαμεν γὰρ αὐτὸ πολλαπλάσιον. οὐκοῦν ἤτοι διπλάσιόν ἐστιν–ἢ μεῖζον ἢ διπλάσιον. ἀλλ' ἐπεὶ ἐδείξαμεν τὸ διπλάσιον διάστημα ἐκ δύο τῶν μεγίστων ἐπιμορίων συγκείμενον, ὥστε, εἰ ἔσται τὸ διὰ πασῶν μεῖζον διπλασίου, οὐ συγκείσεται ἐκ δύο μόνων ἐπιμορίων, ἀλλ' ἐκ πλειόνων, –σύγκειται δὲ ἐκ δύο συμφώνων διαστημάτων, ἔκ τε τοῦ διὰ πέντε καὶ τοῦ διὰ τεσσάρων, οὐκ ἄρα ἔσται τὸ διὰ πασῶν μεῖζον διπλασίου. διπλάσιον ἄρα.

ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ διὰ πασῶν ἐστι διπλάσιον, τὸ δὲ διπλάσιον ἐκ τῶν μεγίστων ἐπιμορίων δύο συνέστηκε, καὶ τὸ διὰ πασῶν ἄρα ἐξ ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου συνέστηκε· ταῦτα γὰρ μέγιστα. συνέστηκε δὲ ἐκ τοῦ διὰ πέντε καὶ ἐκ τοῦ διὰ τεσσάρων, ὄντων ἐπιμορίων· τὸ μὲν ἄρα διὰ πέντε, ἐπειδὴ μεῖζόν ἐστιν, ἡμιόλιον ἂν εἴη, τὸ δὲ διὰ τεσσάρων ἐπίτριτον.

φανερὸν δή, ὅτι καὶ τὸ διὰ πέντε καὶ διὰ πασῶν τριπλάσιόν ἐστιν. ἐδείξαμεν γάρ, ὅτι ἐκ διπλασίου διαστήματος καὶ ἡμιολίου τριπλάσιον διάστημα γίνεται, ὥστε καὶ τὸ διὰ πασῶν καὶ τὸ διὰ πέντε τριπλάσιον. τὸ δὲ δὶς διὰ πασῶν τετραπλάσιόν ἐστιν.

ἀποδέδεικται ἄρα τῶν συμφώνων ἕκαστον, ἐν τίσι λόγοις ἔχει τοὺς περιέχοντας φθόγγους πρὸς ἀλλήλους».

<u>Μετάφραση</u>

Το διαπασών διάστημα είναι διπλάσιο.

Διότι αποδείξαμε ότι αυτό (το διαπασών διάστημα) είναι πολλαπλάσιο. Άρα ή είναι διπλάσιο ή είναι μεγαλύτερο από το διπλάσιο. Αλλά, επειδή αποδείξαμε ότι το διπλάσιο διάστημα συνίσταται από τα δύο μέγιστα επιμόρια διαστήματα, ώστε, εάν θα είναι το διαπασών διάστημα μεγαλύτερο από το διπλάσιο, δεν θα συνίστανται από δύο μόνον επιμόρια διαστήματα, αλλά από περισσότερα, -συνίσταται, όμως, από δύο σύμφωνα διαστήματα, αυτό του «διά πέντε» και αυτό του «διά τεσσάρων». Άρα, λοιπόν, δεν θα είναι το διαπασών διάστημα μεγαλύτερο από το διπλάσιο. Συνεπώς, θα είναι διπλάσιο.

Άλλά, επειδή το διαπασών διάστημα είναι διπλάσιο, το δε διπλάσιο (διάστημα) συνίσταται από τα δύο μέγιστα επιμόρια διαστήματα, και το διαπασών διάστημα άρα συνίσταται από ημιόλιο και επίτριτο διάστημα, διότι αυτά είναι τα μέγιστα.

Δομήθηκε δε (το διαπασών διάστημα) από το διά πέντε διάστημα και το διά τεσσάρων διάστημα[34], που είναι επιμόρια. Άρα, λοιπόν, το μεν διά πεντε διάστημα, επειδή είναι το μεγαλύτερο, θα πρέπει να είναι το ημιόλιον, το δε διά τεσσάρων (διάστημα θα πρέπει να είναι) το επίτριτο.

Είναι φανερό, λοιπόν, ότι το διάστημα διά πέντε και διά πασών είναι τριπλάσιο[35]. Διότι αποδείξαμε ότι από διπλάσιο και ημιόλιο διάστημα δημιουργείται διάστημα τριπλάσιο[36]. Ώστε το διά πασών διάστημα μαζί με το διά πέντε διάστημα (δομούν) τριπλάσιο διάστημα.

Το δε δις διαπασών διάστημα είναι τετραπλάσιο[37].

Άρα, έχει αποδειχθεί ποια σχέση υφίσταται μεταξύ των περιεχόντων[38] φθόγγων του κάθε σύμφωνου διαστήματος.

<u>*ΣΧΟΛΙΑ* (Χ. Σπυρίδης)</u>

34. Από την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων προκύπτει ότι η πρόσθεση του «διά πέντε» διαστήματος και του διά τεσσάρων διαστήματος δίνει:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{1}$$ (το διαπασών διάστημα)

35. Από την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων προκύπτει ότι η πρόσθεση του «διαπασών» διαστήματος και του «διά πέντε» διαστήματος δίνει:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{1}$$ (το τριπλάσιο διάστημα)

36. Από την Πρόταση 7

37. Από την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων προκύπτει ότι ο πολλαπλασιασμός του «διαπασών» διαστήματος επί τον αριθμό 2 δίνει:

$$\left(\frac{2}{1}\right)^2=\frac{4}{1}$$ (το τετραπλάσιο διάστημα)

38. Εννοεί τους εστώτες φθόγγους του κάθε σύμφωνου διαστήματος. Με τον όρο «εστώτες» εννοούνται οι φθόγγοι ενός τετραχόρδου που παρέμεναν ακίνητοι, δηλαδή δεν άλλαζαν παρά τις οποιεσδήποτε αλλαγές στο γένος του τετραχόρδου. Ο Νικόμαχος λέει ότι «οι ακρινοί φθόγγοι ενός τετραχόρδου λέγονται εστώτες, γιατί ουδέποτε αλλάζουν σε οποιοδήποτε από τα γένη». Επιπλέον, ο Αριστόξενος χρησιμοποιεί τον όρο «ακίνητοι» αντί «εστώτες». Ο δε Αλύπιος λέει τους «εστώτες» και «ακλινείς» (σταθεροί, αμετακίνητοι). Από την άλλη μεριά, «κινούμενοι» ήταν οι φθόγγοι που βρίσκονταν ανάμεσα στα δύο ακρα, στη μέση του τετραχόρδου, και που άλλαζαν ανάλογα με το γένος. Ο Βακχείος καλούσε τους κινούμενους φθόγγους ως «φερόμενους».

Η σχέση των εστώτων φθόγγων στα παρακάτω σύμφωνα διαστήματα είναι:

«διά τεσσάρων» ή «επίτριτον» 4:3

«διά πέντε» ή «ημιόλιον» 3:2

«διαπασών» 2:1

«δις διαπασών» 4:1

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 13</u>

«Λοιπὸν δὴ περὶ τοῦ τονιαίου διαστήματος διελθεῖν, ὅτι ἐστὶν ἐπόγδοον.»

«ἐμάθομεν γάρ, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον. ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ διὰ πέντε τὸ διὰ

τεσσάρων ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν τονιαῖόν ἐστι διάστημα· τὸ ἄρα τονιαῖον διάστημά ἐστιν ἐπόγδοον»

Μετάφραση

Λοιπόν, πρέπει να συζητήσουμε σχετικά με το τονιαίο[39] διάστημα, ότι δηλαδή είναι επόγδοο.

Διότι μάθαμε ότι, εάν από το ημιόλιο διάστημα αφαιρεθεί το επίτριτο διάστημα, αυτό που απομένει είναι το επόγδοο (διάστημα). Εάν δε από το «διά πέντε» διάστημα αφαιρεθεί το «διά τεσσάρων» διάστημα, αυτό που απομένει είναι το τονιαίο διάστημα (διάστημα ενός τόνου). Άρα το τονιαίο διάστημα είναι επόγδοο[40].

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

39. Ο όρος «τόνος» είχε διάφορες, και κάποτε όχι ολότελα ξεκαθαρισμένες, σημασίες στην αρχαία ελληνική μουσική. Οι περισσότεροι, όμως, συγγραφείς συμφωνούν στις ακόλουθες σημασίες του όρου:

τάση (τάσις, ύψος)

διάστημα, δηλαδή το διάστημα κατά το οποίο η 5η ξεπερνά την 4η. Αλλιώς, η μεγάλη 2η, όπως λέμε και σήμερα

κλίμακα, τοποθετημένη σε ένα ορισμένο ύψος, π.χ. δώριος τόνος, φρύγιος τόνος (όπως λέμε σήμερα τόνος του σολ, τόνος του ρε κλπ.)

φθόγγος, ήχος (αυτή η σημασία δίνεται από τον Κλεονείδη)

αρμονία, ο Αριστόξενος δίνει τον ακόλουθο ορισμό για τον τόνο: «Το πέμπτο μέρος της αρμονικής ασχολείται με τους τόνους, πάνω στους οποίους εκτελούνται τα συστήματα». Έτσι ο τόνος είναι ο τόπος ή η περιοχή ή το ύψος όπου μια αρμονία μπορεί να αναπαραχθεί.

40. Από την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων προκύπτει ότι η αφαίρεση του «διά τεσσάρων» διαστήματος από το «διά πέντε» διάστημα δίνει: $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}=\frac{9}{8}$ (επόγδοος τόνος)

ΠΡΟΤΑΣΗ 14

«Τὸ διὰ πασῶν ἔλαττον ἢ ἑξὶ τόνων.»

«δέδεικται γὰρ τὸ μὲν διὰ πασῶν διπλάσιον, ὁ δὲ τόνος ἐπόγδοος· τὰ δὲ ἑξὶ ἐπόγδοα διαστήματα μείζονα διαστήματός [ἐστι] διπλασίου. τὸ ἄρα διὰ πασῶν ἔλαττόν ἐστιν ἑξὶ τόνων»

Μετάφραση

Το διαπασών διάστημα είναι μικρότερο από έξι (επόγδοους) τόνους.

Διότι έχει αποδειχθεί ότι το μεν διαπασών διάστημα είναι διπλάσιο, ο δε τόνος είναι επόγδοος[41]. Τα δε έξι επόγδοα διαστήματα (συνθέτουν διάστημα) μεγαλύτερο από το διπλάσιο[42]. Άρα, λοιπόν, το διαπασών διάστημα είναι μικρότερο από έξι (επόγδοους) τόνους.

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

41. Αυτά ισχύουν στις Προτάσεις 12 και 13. Η θεωρία του Αριστόξενου υποθέτει ότι οι έξι τόνοι είναι ακριβώς ίσοι με μια οκτάβα.

42. Από την Πρόταση 9. Από την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων προκύπτει ότι το εξαπλάσιο του επόγδοου τόνου είναι ίσο με:

$$\left(\frac{9}{8}\right)^6 = 2{,}027 > 2 = \frac{2}{1}$$ (το διαπασών διάστημα)

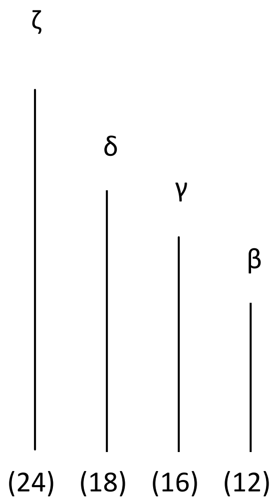
ΠΡΟΤΑΣΗ 15

«Τὸ διὰ τεσσάρων ἔλαττον δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου, καὶ τὸ διὰ πέντε ἔλαττον τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου.»

«ἔστω γὰρ νήτη μὲν διεζευγμένων ὁ Β, παραμέση δὲ ὁ Γ, μέση δὲ ὁ Δ, ὑπάτη δὲ μέσων ὁ Ζ. οὐκοῦν τὸ μὲν ΓΔ διάστημα τόνος ἐστί, τὸ δὲ ΒΖ, διὰ πασῶν ὄν, ἔλαττον ἑξὶ τόνων. τὰ λοιπὰ ἄρα, τό τε ΒΓ καὶ τὸ ΔΖ ἴσα ὄντα ἐλάττονά ἐστι πέντε τόνων. ὥστε τὸ ἐν τῷ ΒΓ ἔλαττον δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου, ὅ ἐστι διὰ τεσσάρων, τὸ δὲ ΒΔ ἔλαττον τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου, ὅ ἐστι διὰ πέντε.»

Μετάφραση

Το «διά τεσσάρων» (διάστημα) είναι μικρότερο από δύο τόνους και ένα ημιτόνιο[43] και το «διά πέντε» (διάστημα) είναι μικρότερο από τρεις τόνους και ένα ημιτόνιο[44].



Διότι έστω ότι ο μεν β είναι νήτη διαζευγμένων, ο δε γ είναι η παραμέση, ότι ο δ είναι η μέση και ότι ο ζ είναι η υπάτη μέσων[45]. Λοιπόν το μεν διάστημα γδ είναι τόνος[46], το δε (διάστημα) βζ, όντας διαπασών, είναι μικρότερο από έξι τόνους[47]. Συνεπώς τα λοιπά (διαστήματα) δηλαδή και το βγ και το δζ, όντας ίσα, είναι μικρότερα από πέντε τόνους. Ώστε το διάστημα που περιλαμβάνεται στο βγ είναι μικρότερο από δύο τόνους και ένα ημιτόνιο, το οποίο είναι το διά τεσσάρων (διάστημα), το δε διάστημα βδ είναι μικρότερο από τρεις τόνους και ένα ημιτόνιο, το οποίο είναι το διά πέντε (διάστημα).

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

43. Ο τόνος διαιρούνταν σε δύο άνισα ημιτόνια, το «μέιζον» και το «έλαττον».

Κατά τον Αριστείδη, για να βρουν οι Αρχαίοι το λόγο του ηιτονίου, αφού ανάμεσα στο 8 και το 9 δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός, διπλασίασαν τους όρους του $\frac{9}{8}=\frac{9\cdot 2}{8\cdot 2}=\frac{18}{16}$ κι έτσι πήραν τον ενδιάμεσο όρο, το 17. Έτσι, καθόρισαν το πρώτο ημιτόνιο ως 17:16 (μείζον ημιτόνιο) και το δεύτερο ημιτόνιο ως 18:17 (έλαττον ημιτόνιο).

Ο Αριστόξενος, από την άλλη μεριά, διαιρούσε τον τόνο σε δύο ίσα ημιτόνια.

Από την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων προκύπτει ότι:

Το «διά τεσσάρων» διάστημα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{4}{3}=1{,}333\ldots=1{,}\overline{3}$$

Ο επόγδοος τόνος δίνεται από τη σχέση $\frac{9}{8}$.

Τότε, το διάστημα δύο τόνων και ενός μείζονος ημιτονίου θα δίνεται από τη σχέση

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \frac{17}{16} = 1{,}3447 > 1{,}\overline{3} = \frac{4}{3}$$ (το «διά τεσσάρων» διάστημα).

Επίσης, το διάστημα δύο τόνων και ενός ελάττονος ημιτονίου θα δίνεται από τη σχέση

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \frac{18}{17} = 1{,}3401 > 1{,}\overline{3} = \frac{4}{3}$$ (το «διά τεσσάρων» διάστημα).

44. Το ημιτόνιο, εάν προς στιγμήν θεωρηθεί ίσο ακριβώς με μισό επόγδοο τόνο, κατά παράβαση του θεωρήματος 16, αλλά σε συμφωνία με τις σύγχρονες απόψεις περί συγκερασμού μόνο και μόνο για λόγους καθαρά μαθηματικής προσέγγισης του προβλήματος, δίνεται από τη σχέση $\sqrt{\frac{9}{8}}$. Το διάστημα δύο τόνων και ενός ημιτονίου δίνεται από τη σχέση

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{9}{8}} = 1{,}3424 > 1{,}\overline{3} = \frac{4}{3}$$ (το «διά τεσσάρων» διάστημα).

Εάν αντί του μισού επόγδοου τόνου $\sqrt{\frac{9}{8}}$ ληφθεί υπόψη το διάστημα $\frac{2187}{2048} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{256}{243}}$ που είναι γνωστό ως Αποτομή του Πυθαγόρα, τότε το διάστημα δύο τόνων και μιας αποτομής θα δίνεται από τη σχέση

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \frac{2187}{2048} = 1{,}3515 > 1{,}\overline{3} = \frac{4}{3}$$ (το «διά τεσσάρων» διάστημα).

45. Η νήτη διαζευγμένων είναι μια τετάρτη πάνω από την παραμέση, η παραμέση είναι έναν τόνο πάνω από τη μέση, η υπάτη μέσων είναι μια τετάρτη κάτω από τη μέση και μια οκτάβα κάτω από τη νήτη διαζευγμένων. Οι πέμπτες είναι από την υπάτη στην παραμέση κι από τη μέση στη νήτη.

46. Από την Πρόταση 13.

47. Από την Πρόταση 14.

ΠΡΟΤΑΣΗ 16

«Ὁ τόνος οὐ διαιρεθήσεται εἰς δύο ἴσα οὔτε εἰς πλείω.»

«ἐδείχθη γὰρ ὢν ἐπιμόριος· ἐπιμορίου δὲ διαστήματος μέσοι οὔτε πλείους οὔτε εἷς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν. οὔκ ἄρα διαιρεθήσεται ὁ τόνος εἰς ἴσα»

Μετάφραση

Ο τόνος δε θα διαιρεθεί σε δύο[48] ίσα ή περισσότερα (ίσα διαστήματα).

Διότι αποδείχθηκε ότι (ο τόνος) είναι επιμόριος[49]. Σε επιμόριο δε διάστημα δεν παρεμβάλλονται ούτε ένας ούτε περισσότεροι μέσοι ανάλογοι (αριθμοί)[50]. Άρα ο τόνος δε θα διαιρεθεί σε ίσα (διαστήματα).

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

48. Λείμμα: το υπόλοιπο. Στη μουσική ο όρος αυτός σήμαινε τα εξής:

α) Οι Πυθαγόρειοι δήλωναν με τον όρο αυτό το «έλαττον» ημιτόνιο. Εφόσον ο τόνος μοιραζόταν σε δύο ανόμοια μέρη, το μικρότερο ονομαζόταν «λείμμα». Κατά τον Πλούταρχο, «τοῦτον οἱ μὲν ἁρμονικοὶ δίχα τεμνόμενον οἴονται δύο διαστήματα ποιεῖν, ὧν ἑκάτερον ἡμιτόνιον καλοῦσιν· οἱ δὲ Πυθαγορικοὶ τὴν μὲν εἰς ἴσα τομὴν ἀπέγνωσαν αὐτοῦ, τῶν δὲ τμημάτων ἀνίσων ὄντων λεῖμμα τὸ ἔλαττον ὀνομάζουσιν, ὅτι τοῦ ἡμίσεος ἀπολείπει.», δηλαδή [οι αρμονικοί πιστεύουν ότι ο τόνος διαιρείται σε δύο τμήματα, το καθένα από τα οποία ονομάζουν ημιτόνιο, αλλά οι Πυθαγόρειοι αποδοκίμασαν τη διαίρεση σε ίσα μέρη και ονόμασαν από τα άνισα αυτά μέρη το μικρότερο λείμμα, γιατί είναι μικρότερο από το μισό]. Ο Πτολεμαίος καθορίζει το λείμμα ως εξής: «ᾗ ὑπερέχει τὸ διὰ τεσσάρων τοῦ διτόνου, καλουμένην δὲ λεῖμμα, ἐλάττονα εἶναι ἡμιτονίου», δηλαδή [το διάστημα κατά το οποίο η καθαρή τετάρτη είναι μεγαλύτερη από το δίτονο. Είναι δε το [λείμμα] μικρότερο του ημιτονίου].

β) Λείμμα λεγόταν και η μικρότερη σιωπή (παύση) και σημειωνόταν με το γράμμα Λ (το αρχικό της λέξης Λείμμα).

Αποτομή: (από το ρήμα αποτέμνω = αποκόπτω). Με τον όρο αυτό οι Πυθαγόρειοι ονόμαζαν το «μείζον» ημιτόνιο. Ο δε Φιλόλαος διαιρούσε τον τόνο σε δύο άνισα μέρη, τη δίεση $\left(\frac{13}{27}\right)$ και την αποτομή $\left(\frac{14}{27}\right)$. Έπαιρνε το 3 στην τρίτη δύναμη, δηλαδή 27, διαιρούσε ύστερα το 27 σε δύο, αναγκαστικά ανόμοια, μέρη και ονόμαζε το μικρότερο (13) δίεση και το μεγαλύτερο (14) αποτομή.

49. Από την Πρόταση 13.

50. Από την Πρόταση 3.

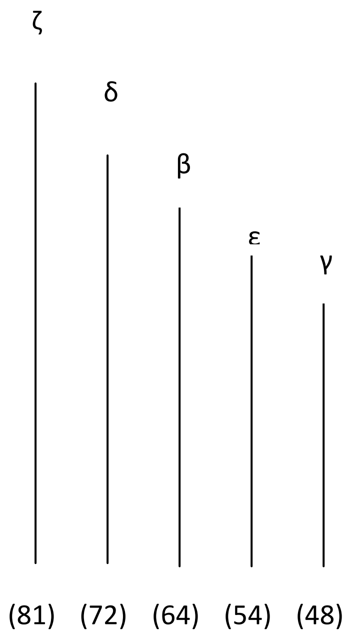
Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται το σύνολο των προτάσεων που αφορούν στους λόγους και τις ιδιότητες των διαστημάτων που προκύπτουν με αφαίρεση από την κλίμακα. Οι Π17 και Π18 αφορούν κάποιες νότες με συγκεκριμένα ονόματα. Ωστόσο ο συγγραφέας δεν αποσαφηνίζει το λόγο που αυτές οι νότες χρήζουν ειδικής μεταχείρησης. Ενώ κατά ένα μέρος τους είναι ξεκάθαρες, ο σοβαρός σκοπός πίσω από αυτές τις προτάσεις είναι πιο απόκρυφος. Αυτό που είναι σαφές είναι ότι αυτές οι νότες δεν βρίσκονται σε κάποιο από τα διαστήματα που έχουν συζητηθεί προηγουμένως από τις σημαντικές σταθερές νότες της κλίμακας κι επομένως οι θέσεις τους πρέπει να καθοριστούν. Η Π17 ορίζει ότι οι θέσεις των δύο ομάδων αυτών των νοτών μπορούν να βρεθούν «μέσω συμφωνιών». Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να συσχετιστούν με άλλες γνωστές νότες της κλίμακας, μέσω ήδη γνωστών λόγων. Η Π18 αποδεικνύει ένα ειδικό θεώρημα για νότες που βρίσκονται μέσα στο «πυκνόν», δηλαδή στο υπόλοιπο του τετραχόρδου, μετά το πρώτο διάστημα και προς τα κάτω. Πρόκειται για το δίτονο, το υπόλοιπο του οποίου είναι λιγότερο από ένα ημιτόνιο (Π15). Αυτή η μορφή κλίμακας είναι γνωστή ως εναρμόνιο γένος και αναφέρεται ρητά στις Π17 και Π18, όμως όχι και στις Π19 και Π20. Οι λόγοι για την αλλαγή του γένους θα συζητηθούν παρακάτω. Αυτή η συζήτηση μπορεί να βοηθήσει να ξεκαθαρίσουμε τις παρούσες προτάσεις και τη σχέση με τις προηγούμενες και τις επόμενές τους.

ΠΡΟΤΑΣΗ 17

«Αἱ παρανῆται καὶ αἱ λιχανοὶ ληφθήσονται διὰ συμφωνίας οὕτως. ἔστω γὰρ μέση ὁ Β. ἐπιτετάσθω διὰ τεσσάρων ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἀνείσθω διὰ πέντε ἐπὶ τὸ Δ. τόνος ἄρα ὁ ΒΔ. πάλιν δὲ ἀπὸ τοῦ Δ διὰ τεσσάρων ἐπιτετάσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἀνείσθω ἐπὶ τὸ Ζ διὰ πέντε. τόνος ἄρα τὸ ΖΔ. δίτονος ἄρα τὸ ΖΒ. λιχανὸς ἄρα τὸ Ζ. ὁμοίως ἂν καὶ αἱ παρανῆται ληφθήσονται»

Μετάφραση

Οι παρανήτες[51] και οι λιχανοί[52] θα ληφθούν (θα προκύψουν) με συμφωνίες (χρησιμοποιώντας σύμφωνα διαστήματα) ως εξής:



Έστω, λοιπόν, ο β ως μέση. Με τέντωμα κατά διάστημα «διά τεσσάρων» φθάστε στο γ και από το γ με χαλάρωμα κατά διάστημα «διά πέντε» φθάστε στο δ. Άρα το διάστημα βδ είναι τόνος[53]. Πάλι από το δ με τέντωμα κατά διάστημα «διά τεσσάρων» φθάστε στο ε και από το ε με χαλάρωμα κατά διάστημα «διά πέντε» φθάστε στο ζ. Άρα το διάστημα ζδ είναι τόνος. Το διάστημα ζβ, λοιπόν, είναι δύο τόνων (δίτονο). Συνεπώς το ζ είναι λιχανός. Με όμοιο τρόπο θα προκύψουν (θα ληφθούν) και οι παρανήτες.

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

51. Παρανήτη: η νότα και η χορδή «παρά» τη νήτη, μια δευτέρα πιο κάτω. Η παρανήτη διατηρεί το όνομά της και στα τρία γένη, ανεξάρτητα από την απόσταση από τη νήτη.

52. Λιχανός: ως λέξη γένους αρσενικού σημαίνει το δάκτυλο δείκτης, ως λέξη γένους θηλυκού σημαίνει τη χορδή (ή τη νότα που παράγεται από τη χορδή) που παίζεται με το δείκτη, το λιχανό. Ο Αριστείδης Κοϊντιλιανός, στο De Musica, λέει: «λιχανοὶ προσηγορεύθησαν, ὁμωνύμως τῷ πλήττοντι δακτύλῳ τὴν ἠχοῦσαν αὐτὰς χορδὴν ἐπονομασθεῖσαι.», δηλαδή [ονομάστηκαν λιχανοί από το ομώνυμο δάκτυλο, που χτυπά τη χορδή που τις παράγει]. Επίσης, λιχανός ήταν η τρίτη νότα από κάτω, τόσο στο επτάχορδο όσο και στο οκτάχορδο. Συχνά η λιχανός ονομαζόταν και διάτονος.

53. Από την υπόθεση της Πρότασης 13.

ΠΡΟΤΑΣΗ 18

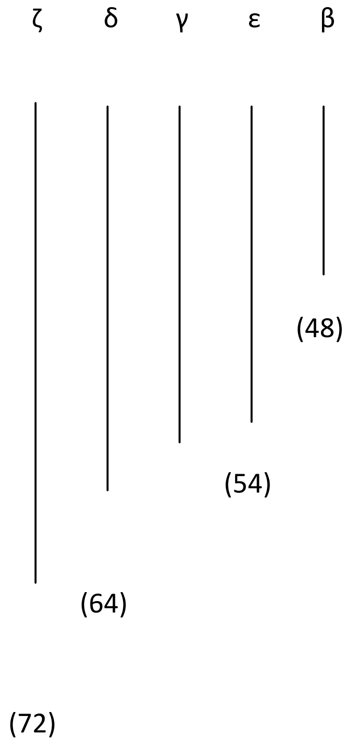
«Αἱ παρυπάται καὶ αἱ τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα.»

«ἔστω γὰρ μέση μὲν ὁ Β, λιχανὸς δὲ ὁ Γ, ὑπάτη δὲ ὁ Δ. ἀνείσθω ἀπὸ τοῦ Β διὰ πέντε ἐπὶ τὸ Ζ. τόνος ἄρα ὁ ΖΔ. καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ διὰ τεσσάρων ἐπιτετάσθω ἐπὶ τὸ Ε. τόνος ἐστὶν ἄρα τὸ ΖΔ διάστημα καὶ τὸ ΒΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΓ. τὸ ἄρα ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΒ. διὰ τεσσάρων δὲ τὸ ΖΕ· οὐκ ἄρα μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει τις τῶν ΖΕ· ἐπιμόριον γὰρ τὸ διάστημα. καί ἐστιν ἴσος ὁ ΔΒ τῷ ΖΕ·

οὐκ ἄρα τοῦ ΔΓ μέσος ἐμπεσεῖται, ὅ ἐστιν ἀπὸ ὑπάτης ἐπὶ λιχανόν. οὐκ ἄρα ἡ παρυπάτη διελεῖ τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα. ὁμοίως οὐδὲ ἡ τρίτη.»

Μετάφραση

Οι παρυπάτες και οι τρίτες δεν διαιρούν το πυκνόν σε ίσα διαστήματα.



Έστωσαν, λοιπόν, ο μεν β ως μέση, ο δε γ ως λιχανός και ο δ ως υπάτη. Χαλαρώστε από τον β και φθάστε στον ζ με διάστημα «διά πέντε». Άρα το (διάστημα) ζδ είναι τόνος. Και από τον ζ τεντώστε και φθάστε στον ε με διάστημα «διά τεσσάρων». Άρα ο τόνος είναι και το διάστημα ζδ και το διάστημα βε.

Το διάστημα δγ ας μένει ως κοινό. Το διάστημα, λοιπόν, ζε είναι ίσο με το (διάστημα) δβ. Το διάστημα ζε είναι «διά τεσσάρων». Άρα κανένας από τους μέσους του διαστήματος ζε δεν παρεμβάλλεται ως μέσος ανάλογος, διότι είναι επιμόριο το διάστημα. Και είναι το διάστημα δβ ίσο με το διάστημα ζε. Άρα, λοιπόν, δεν θα παρεμβάλλεται μέσος ανάλογος αριθμός στο διάστημα δγ, το οποίο είναι από την θυπάτη ως τον λιχανό. Κατά συνέπεια η παρυπάτη δεν θα διαιρεί το πυκνόν σε ίσα διαστήματα.

Με όμοιο τρόπο ούτε η τρίτη (θα διαιρεί το πυκνόν σε ίσα διαστήματα).

Οι Π19 και Π20 δεν είναι του ίδιου είδους προτάσεις με τις προηγούμενες. Αυτό που μας παρέχουν είναι μια μέθοδο κατασκευής για τον καθορισμό των ορίων του «κανόνα» ή της μετρήσιμης ράβδου, ώστε μια χορδή ίσου μήκους, όταν τεντωθεί πάνω από τη ράβδο και σταματηθεί από μια κινούμενη γέφυρα σε καθένα από τα σημειωμένα σημεία, να παράγει τα διαστήματα της κλίμακας.

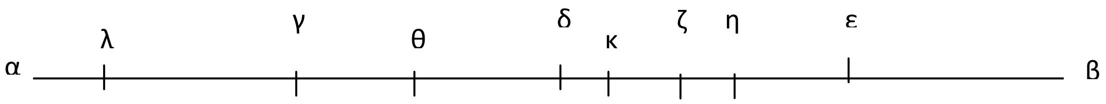
<u>*ΠΡΟΤΑΣΗ 19*</u>

«Τὸν κανόνα καταγράψαι κατὰ τὸ καλούμενον ἀμετάβολον σύστημα»

«ἔστω τοῦ κανόνος μῆκος, ὃ καὶ τῆς χορδῆς, τὸ ΑΒ, καὶ διῃρήσθω εἰς τέσσαρα ἴσα κατὰ τὰ Γ, Δ, Ε. ἔσται ἄρα ὁ ΒΑ βαρύτατος ὢν φθόγγος βόμβυξ. οὗτος δὲ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΒ ἐπίτριτός ἐστιν, ὥστε ὁ ΓΒ τῷ ΑΒ συμφωνήσει διὰ τεσσάρων ἐπὶ τὴν ὀξύτητα. καί ἐστιν ὁ ΑΒ προσλαμβανόμενος· ὁ ἄρα ΓΒ ἔσται ὑπάτων διάτονος. πάλιν ἐπεὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΒΔ ἐστι διπλοῦς, συμφωνήσει τῇ διὰ πασῶν καὶ ἔσται ὁ ΒΔ μέση. πάλιν ἐπεὶ τετραπλάσιός ἐστιν ὁ ΑΒ τοῦ ΕΒ, ἔσται ὁ ΕΒ νήτη ὑπερβολαίων. ἔτεμον τὸν ΓΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ. καὶ ἔσται διπλάσιος ὁ ΓΒ τοῦ ΖΒ, ὥστε συμφωνεῖν τὸν ΓΒ πρὸς τὸν ΖΒ διὰ πασῶν· ὥστε εἶναι τὸν ΖΒ νήτην συνημμένων. ἀπέλαβον τοῦ ΔΒ τρίτον μέρος τὸ ΔΗ. καὶ ἔσται ἡμιόλιος ὁ ΔΒ τοῦ ΗΒ, ὥστε συμφωνήσει ὁ ΔΒ πρὸς τὸν ΗΒ ἐν τῷ διὰ πέντε· ὁ ἄρα ΗΒ νήτη ἔσται διεζευγμένων. ἔθηκα τῷ ΗΒ ἴσον τὸν ΗΘ, ὥστε ὁ ΘΒ πρὸς τὸν ΗΒ συμφωνήσει διὰ πασῶν, ὡς εἶναι τὸν ΘΒ ὑπάτην μέσων. ἔλαβον τοῦ ΘΒ τρίτον μέρος τὸ ΘΚ. καὶ ἔσται ἡμιόλιος ὁ ΘΒ τοῦ ΚΒ, ὥστε εἶναι τὸν ΚΒ παράμεσον. ἀπέλαβον τῷ ΚΒ ἴσον τὸν ΛΚ καὶ γενήσεται ὁ ΛΒ ὑπάτη βαρεῖα. ἔσονται ἄρα εἰλημμένοι ἐν τῷ κανόνι πάντες οἱ <ἑστῶτες> φθόγγοι τοῦ ἀμεταβόλου συστήματος».

<u>*Μετάφραση*</u>

Θα καταγραφεί ο κανόνας κατά το αποκαλούμενο αμετάβολον σύστημα[54].



Έστω αβ το μήκος του κανόνα, που είναι και (ίσο με το) μήκος της χορδής και ας διαιρεθεί σε τέσσερα ίσα μήκα στη σημεία γ, δ και ε. Θα είναι, κατά συνέπεια, ο βα «βόμβυξ»[55], όντας ο πιο βαρύς φθόγγος. Αυτός, λοιπόν, ο αβ είναι επίτριτος του γβ (εννοεί ο Ευκλείδης επίτριτος ως προς τα μήκη των δονουμένων τμημάτων της χορδής, δηλαδή $\frac{\alpha\beta}{\gamma\beta}=\frac{4}{3}$), ώστε, όσον αφορά στην οξύτητα του ήχου, ο γβ ως προς τον αβ σχηματίζουν τη «δια τεσσάρων» συμφωνία.

Και είναι ο αβ προσλαμβανόμενος. Κατά συνέπεια, ο γβ θα είναι υπάτων διάτονος[56].

Πάλι, επειδή ο αβ είναι διπλάσιος του βδ (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς το μήκος), σχηματίζουν τη διαπασών συμφωνία και θα είναι ο βδ μέση.

Πάλι, επειδή ο αβ είναι τετραπλάσιος (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς το μήκος) του εβ, θα είναι ο εβ νήτη υπερβολαίων.

Έτμησα τον γβ στο μέσον του ζ. Και θα είναι ο γβ διπλάσιος (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς το μήκος) του ζβ, ώστε ο γβ ως προς τον ζβ σχηματίζει την διαπασών συμφωνία. Οπότε ο ζβ είναι η νήτη συνημμένων.

Πήρα το τμήμα δη να είναι το $\frac{1}{3}$ του δβ και θα είναι ο δβ ημιόλιος (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς το μήκος) του ηβ, ώστε ο δβ ως προς τον ηβ σχηματίζει την «δια πέντε» συμφωνία. Οπότε ο ηβ θα είναι η νήτη διαζευγμένων.

Έθεσα τον ηθ ίσον με τον ηβ, ώστε ο θβ ως προς τον ηβ σχηματίζει την διαπασών συμφωνία. Οπότε ο θβ είναι η υπάτη μέσων.

Πήρα τον θκ να είναι το $\frac{1}{3}$ του θβ και θα είναι ο θβ ημιόλιος του κβ (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς το μήκος), οπότε ο κβ είναι η παραμέση.

Πήρα τον λκ να είναι ισομήκης του κβ και θα γίνει ο λβ υπάτη βαρεία.

Άρα θα έχουν ληφθεί επάνω στον κανόνα όλοι οι «εστώτες» φθόγγοι του αμετάβολου συστήματος.

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

54. Σύστημα: είναι η ένωση δύο ή περισσότερων διαστημάτων, σύμφωνα με πολλούς αρχαίους θεωρητικούς. Κατά τον Αριστόξενο: «τὸ δὲ σύστημα σύνθετόν τι νοητέον ἐκ πλειόνων ἢ ἑνὸς διαστημάτων», δηλαδή [το σύστημα πρέπει να νοηθεί από περισότερα από ένα διαστήματα]. Τον ίδιο ορισμό δίνει και ο Νικόμαχος: «σύστημα δὲ πλεόνων ἑνὸς διαστημάτων σύνθεσιν» καθώς και ο Κλεονείδης. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς των αρχαίων θεωρητικών, μία ένωση τριών φθόγγων (τρίχορδο), τεσσάρων (τετράχορδο) κλπ. θα έπρεπε να θεωρηθεί ως ένα σύστημα. Κατά την αριστοξένεια θεωρία, τα συστήματα διέφεραν ως προς:

- το μέγεθος «πρώτη μὲν οὖν ἐστὶ διαστημάτων διαίρεσις καθ' ἣν μεγέθει ἀλλήλων διαφέρει»
- το γένος «ἡ κατὰ γένος»
- τη συμφωνία και τη διαφωνία «σύστημα τῷ τε συμφώνους ἢ διαφώνους εἶναι τοὺς ὁρίζοντας φθόγγους»
- το σύμμετρο και το ασύμμετρο «διαφέρει τὰ ῥητὰ τῶν ἀλόγων»
- το συνεχές και μη συνεχές «σύστημα ἤτοι συνεχὲς ἢ ὑπερβατόν ἐστι»
- το συζευγμένο και διαζευγμένο «τὸ συναμφότερον μερίζουσαν· τὸ σύστημα γὰρ ἀπό τινος μεγέθους ἀρξάμενον ἢ συνημμένον ἢ διεζευγμένον ἢ μικτὸν ἐξ ἀμφοτέρων»
- το αμετάβολο και το μεταβολικό

Σύμφωνα με τον Πτολεμαίο: «Τούτων δὴ προεκτεθειμένων σύστημα μὲν ἁπλῶς καλεῖται τὸ συγκείμενον μέγεθος ἐκ συμφωνιῶν, καθάπερ συμφωνία τὸ συγκείμενον μέγεθος ἐξ ἐμμελειῶν, καὶ ἔστιν ὥσπερ συμφωνία συμφωνιῶν τὸ σύστημα», δηλαδή [σύστημα λέγεται απλώς το μέγεθος που αποτελείται από συμφωνίες, όπως ακριβώς συμφωνία είναι το μέγεθος που αποτελείται από εμμέλειες (μελωδικότητες). Έτσι το σύστημα είναι σαν μια συμφωνία συμφωνιών» και «τέλειον δὲ σύστημα λέγεται τὸ περιέχον πάσας τὰς συμφωνίας μετὰ τῶν καθ' ἑκάστην εἰδῶν», δηλαδή [τέλειο σύστημα είναι εκείνο που περιέχει όλες τις συμφωνίες με όλα τα είδη τους].

Απλό σύστημα (ή μη μετατροπικό): Κατά τον Κλεονείδη «απλό είναι ένα σύστημα που είναι αρμοσμένο σε μια μέση, σε αντιδιαστολή με το διπλό που είναι αρμοσμένο σε δύο μέσες κ.ο.κ». Κατά τον Αριστείδη, «απλό σύστημα είναι εκείνο που έχει συντεθεί με έναν τρόπο».

Μεταβολή: είναι η μετατροπία, δηλαδή η αλλαγή που γινόταν κατά τη διάρκεια μιας μελωδίας, ως προς το γένος, το σύστημα, τον τόπο, το ήθος κλπ.

Μετάβολο: μετατροπικό σύστημα, σε αντίθεση προς το απλό (μη μετατροπικό) σύστημα.

55. Βόμβυξ: α) είναι ο σωλήνας, το κύριο σώμα του αυλού

β) στον πληθυντικό, βόμβυκες ονομάζονταν τα «κλειδιά» ή «δαχτυλίδια» που αντιστοιχούσαν στις τρύπες του αυλού και χρησίμευαν στο να τις ανοιγοκλείνουν.

γ) συχνά αποκαλούνταν έτσι και ο ίδιος ο αυλός, ιδιαίτερα ο βαρύτονος

δ) η βαθύτερη (χαμηλότερη) νότα που παράγει ο αυλός με όλες τις τρύπες κλειστές, δηλαδή με ολόκληρο το μήκος της αέρινης στήλης

56. Με βάση τα όσα αναφέρονται στην Πρόταση 19, μπορούμε να βάλουμε «τάστα» σε οποιοδήποτε μάνικο μήκους αβ, δηλαδή να καθορίσουμε επακριβώς τη θέση των φθόγγων επί χορδής, που σχημάτιζαν τα διαστήματα του αμετάβολου συστήματος. Πρέπει να παρατηρήσουμε το εξής: Αν τα ονόματα προσλαμβανόμενος, υπάτων διάτονος, μέση, νήτη υπερβολαίων, νήτη συνημμένων, νήτη διαζευγμένων, υπάτη μέσων και παραμέση αναφέρονται ως ονόματα διαστημάτων, τότε καλώς για το συμβολισμό τους χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης ζεύγος γραμμάτων, δηλαδή αβ, γβ, βδ, εβ, ζβ, ηβ, γβ, κβ. Αν, όμως, αναφέρονται ως

ονόματα φθόγγων, τότε θα έπρεπε να χρησιμοποιήσει ο Ευκλείδης απλά γράμματα και για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις τα γράμματα:

α αντί αβ	αβ	βόμβυξ	α αντί αβ προσλαμβανόμενος
γ αντί γβ	αβ:γβ=4:3	επίτριτος	γ αντί γβ υπάτων διάτονος
δ αντί βδ	αβ:βδ=2:1		δ αντί βδ μέση
ε αντί εβ	αβ:εβ=4:1		ε αντί εβ νήτη υπερβολαίων
ζ αντί ζβ	γβ:ζβ=2:1		ζ αντί ζβ νήτη συνημμένων
η αντί ηβ	δβ:ηβ=3:2	ημιόλιος	η αντί ηβ νήτη διαζευγμένων
θ αντί θβ	θβ:ηβ=2:1	διαπασών	θ αντί θβ υπάτη μέσων
κ αντί κβ	θκ:κβ=3:2	ημιόλιος	κ αντί κβ παραμέση
λ αντί λβ	κβ:λβ=1:1		λ αντί λβ υπάτη βαρεία

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 20</u>

«Λοιπὸν δὴ τοὺς φερομένους λαβεῖν».

«ἔτεμον τὸν ΕΒ εἰς ὀκτὼ καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔθηκα τὸν ΕΜ, ὥστε τὸν ΜΒ τοῦ ΕΒ γενέσθαι ἐπόγδοον. καὶ πάλιν διελὼν τὸν ΜΒ εἰς ὀκτὼ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔθηκα τὸν ΝΜ· τόνῳ ἄρα βαρύτερος ἔσται ὁ ΝΒ τοῦ ΒΜ, ὁ δὲ ΜΒ τοῦ ΒΕ, ὥστε ἔσται μὲν ὁ ΝΒ τρίτη ὑπερβολαίων, ὁ δὲ ΜΒ ὑπερβολαίων διάτονος. ἔλαβον τοῦ ΝΒ τρίτον μέρος καὶ ἔθηκα τὸν ΝΞ, ὥστε τὸν ΞΒ τοῦ ΝΒ εἶναι ἐπίτριτον καὶ διὰ τεσσάρων συμφωνεῖν ἐπὶ τὴν βαρύτητα καὶ γενέσθαι τὸν ΞΒ τρίτην διεζευγμένων. πάλιν τοῦ ΞΒ λαβὼν ἥμισυ μέρος ἔθηκα τὸν ΞΟ, ὥστε διὰ πέντε συμφωνεῖν τὸν ΟΒ πρὸς τὸν ΞΒ· ὁ ἄρα ΟΒ ἔσται παρυπάτη μέσων. καὶ τῷ ΞΟ ἴσον ἔθηκα τὸν ΟΠ, ὥστε γενέσθαι τὸν ΠΒ παρυπάτην ὑπάτων. ἔλαβον δὴ τοῦ ΒΓ τέταρτον μέρος τὸν ΓΡ, ὥστε γενέσθαι τὸν ΡΒ μέσων διάτονον».

<u>Μετάφραση</u>

Πρέπει, λοιπόν, να λάβουμε (επάνω στον κανόνα) τους φερομένους (κινούμενους) φθόγγους.

Έκοψα το τμήμα εβ σε οκτώ ίσα τμήματα και έθεσα το εμ ίσο με ένα απ’ αυτά, ώστε το μβ να γίνει επόγδοο του εβ (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς τα μήκη των δονούμενων τμημάτων της χορδής).

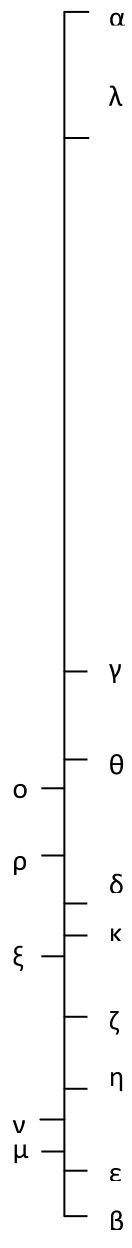
Και πάλι διαιρώντας το τμήμα μβ σε οκτώ ίσα τμήματα, έθεσα το νμ ίσο μ’ ένα από αυτά. Άρα κατά διάστημα τόνου είναι βαρύτερος ο νβ (εννοεί ο Ευκλείδης τον φθόγγο που παράγεται από το δονούμενο τμήμα νβ της χορδής) από το βμ (εννοεί ο Ευκλείδης τον φθόγγο που παράγεται από το δονούμενο τμήμα βμ της χορδής) καθώς και ο μβ (εννοεί ο Ευκλείδης τον φθόγγο που παράγεται από το δονούμενο τμήμα μβ της χορδής) από τον βε (εννοεί ο Ευκλείδης τον φθόγγο που παράγεται από το δονούμενο τμήμα βε της χορδής), ώστε θα είναι ο μεν νβ τρίτη υπερβολαίων, ο δε μβ υπερβολαίων διάτονος.

Πήρα το $\frac{1}{3}$ του τμήματος νβ και τοποθέτησα τον νξ, ώστε ο ξβ να είναι επίτριτος του νβ (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς τα μήκη των δονούμενων τμημάτων της χορδής) και, όσον αφορά στη βαρύτητα, να δημιουργούν τη «διά τεσσάρων» συμφωνία και καθίσταται ο ξβ τρίτη διαζευγμένων.

Πάλι παίρνοντας το μισό του τμήματος ξβ, τοποθέτησα τον ξο, ώστε ο οβ ως προς τον ξβ να δημιουργούν τη «δια πέντε» συμφωνία. Άρα ο οβ θα είναι η παρυπάτη μέσων.

Και τοποθέτησα το οπ ίσο με το ξο, ώστε να γίνει ο πβ παρυπάτη υπάτων.

Πήρα, λοιπόν, τον γρ ίσον προς το $\frac{1}{4}$ του βγ, ώστε να γίνει ο ρβ μέσων διάτονος[57].



<u>*ΣΧΟΛΙΑ* (Χ. Σπυρίδης)</u>

57. Τα Θεωρήματα 19 και 20 μας καθοδηγούν στο να υπολογίσουμε επακριβώς τα μήκη οποιωνδήποτε τμημάτων της χορδής, να σχεδιάσουμε σωστά ένα διάγραμμα του κανόνα και, τέλος, να προχωρήσουμε στην κατασκευή του κανόνα με τα τάστα στην πρέπουσα θέση. Για τη σχεδιαστική διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε κ το πλήθος ίσα ευθύγραμμα τμήματα, πρέπει να έχουμε υπόψη μας το εξής θεώρημα του Θαλή: «Εάν τμήματα ευθείας γραμμής, που περιέχονται ανάμεσα σε παράλληλες ευθείες γραμμές, είναι ίσα, τότε και τα τμήματα οποιασδήποτε άλλης

ευθείας γραμμής, που περιέχονται ανάμεσα σε αυτές τις παράλληλες ευθείες, είναι ίσα». Κατά την υπολογιστική διαδικασία αντιμετωπίζονται τα διάφορα μήκη των τμημάτων της χορδής ως κλάσματα του όλου μήκους αυτής.

Με τα όσα αναφέρονται στην Πρόταση 19, προκύπτουν οι εξής πληροφορίες αναφορικά με τα μήκη των τμημάτων της χορδής αβ ανάμεσα στους εστώτες φθόγγους του αμετάβολου συστήματος των αρχαίων Ελλήνων.

Έστω $\alpha\beta = x$ (1)

Ενέργεια 1η: $\alpha\gamma = \gamma\delta = \delta\varepsilon = \varepsilon\beta = \frac{\alpha\beta}{4} = \frac{x}{4}$ (2)

$\gamma\beta = \frac{3}{4}\alpha\beta = \frac{3}{4}x$ (3)

Ενέργεια 2η και σχέση (3) $\Rightarrow \gamma\zeta = \zeta\beta = \frac{\gamma\beta}{2} = \frac{3}{8}x$ (4)

σχέση (2) $\Rightarrow \delta\beta = \frac{x}{2}$ (5)

Ενέργεια 3η και σχέση (5) $\Rightarrow \delta\eta = \frac{1}{3}\delta\beta = \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2} = \frac{x}{6}$ (6)

σχέση (5) και (6) $\Rightarrow \eta\beta = \frac{2}{3}\delta\beta = \frac{2}{3}\cdot\frac{x}{2} = \frac{x}{3}$ (7)

Ενέργεια 4η και σχέση (7) $\Rightarrow \eta\theta = \eta\beta = \frac{x}{3}$ (8)

σχέση (8) $\Rightarrow \theta\beta = \theta\eta + \eta\beta = \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$ (9)

Ενέργεια 5η και σχέση (9) $\Rightarrow \theta\kappa = \frac{1}{3}\theta\beta = \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{3} = \frac{2x}{9}$
(10)

σχέση (9) και (10) $\Rightarrow \kappa\beta = \theta\beta - \theta\kappa = \frac{2x}{3} - \frac{2x}{9} = \frac{4x}{9}$ (11)

Ενέργεια 6η και σχέση (11) $\Rightarrow \lambda\kappa = \kappa\beta = \frac{4x}{9}$ (12)

σχέση (1), (12) και (11) $\Rightarrow \alpha\lambda = \alpha\beta - \lambda\beta = \alpha\beta - (\lambda\kappa + \kappa\beta) = x - \frac{8x}{9} = \frac{x}{9}$ (13)

σχέση (2) και (13) $\Rightarrow \lambda\gamma = \alpha\gamma - \alpha\lambda = \frac{x}{4} - \frac{x}{9} = \frac{5x}{36}$ (14)

σχέση (3) και (9) $\Rightarrow \gamma\theta = \gamma\beta - \theta\beta = \frac{3x}{4} - \frac{2x}{3} = \frac{x}{12}$ (15)

σχέση (2) και (15) $\Rightarrow \theta\delta = \gamma\delta - \gamma\theta = \frac{x}{4} - \frac{x}{12} = \frac{x}{6}$ (16)

σχέση (10) και (16) $\Rightarrow \delta\kappa = \theta\kappa - \theta\delta = \frac{2x}{9} - \frac{x}{6} = \frac{x}{18}$ (17)

σχέση (4), (15), (16), (17) $\Rightarrow \kappa\zeta = \gamma\zeta - (\gamma\theta + \theta\delta + \delta\kappa) = \frac{3x}{8} - \left(\frac{x}{12} + \frac{x}{6} + \frac{x}{18}\right) = \frac{5x}{72}$ (18)

σχέση (16), (17) και (18) $\Rightarrow \zeta\eta = \delta\eta - (\delta\kappa + \kappa\zeta) = \frac{x}{6} - \left(\frac{x}{18} + \frac{5x}{72}\right) = \frac{x}{6} - \frac{9x}{72} = \frac{x}{24}$ (19)

σχέση (7) και (2) $\Rightarrow \eta\varepsilon = \eta\beta - \varepsilon\beta = \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{x}{12}$ (20)

σχέση (19) και (7) $\Rightarrow \zeta\beta = \zeta\eta + \eta\beta = \frac{x}{24} + \frac{x}{3} = \frac{3x}{8}$ (21)

σχέση (17) και (12) $\Rightarrow \delta\beta = \delta\kappa + \kappa\beta = \frac{x}{18} + \frac{4x}{9} = \frac{x}{2}$ (22)

σχέση (15) και (9) $\Rightarrow \gamma\beta = \gamma\theta + \theta\beta = \frac{x}{12} + \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4}$ (23)

σχέση (14) και (3) $\Rightarrow \lambda\beta = \lambda\gamma + \gamma\beta = \frac{5x}{36} + \frac{3x}{4} = \frac{8x}{9}$ (24)

Για τα μήκη των μη δονούμενων τμημάτων της χορδής (θέσεις τάστων) ισχύουν οι σχέσεις:

σχέση (13) $\Rightarrow \alpha\lambda = \frac{x}{9} = \frac{8}{72}x$ (25)

σχέση (1) και (3) $\Rightarrow \alpha\gamma = \alpha\beta - \beta\gamma = x - \frac{3x}{4} = \frac{x}{4} = \frac{18}{72}x$ (26)

σχέση (1) και (9) $\Rightarrow \alpha\theta = \alpha\beta - \beta\theta = x - \frac{2x}{3} = \frac{x}{3} = \frac{24}{72}x$ (27)

σχέση (1) και (5) $\Rightarrow \alpha\delta = \alpha\beta - \beta\delta = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} = \frac{36}{72}x$ (28)

σχέση (1) και (11) $\Rightarrow \alpha\kappa = \alpha\beta - \beta\kappa = x - \frac{4x}{9} = \frac{5x}{9} = \frac{40}{72}x$ (29)

σχέση (1) και (4) $\Rightarrow \alpha\zeta = \alpha\beta - \beta\zeta = x - \frac{3x}{8} = \frac{5x}{8} = \frac{45}{72}x$ (30)

σχέση (1) και (7) $\Rightarrow \alpha\eta = \alpha\beta - \beta\eta = x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3} = \frac{48}{72}x$ (31)

σχέση (1) και (2) $\Rightarrow \alpha\varepsilon = \alpha\beta - \beta\varepsilon = x - \frac{x}{4} = \frac{3x}{4} = \frac{54}{72}x$ (32)

σχέση (1) $\Rightarrow \alpha\beta = x = \frac{72}{72}x$ (33)

Έχουμε ως παρονομαστές τους αριθμούς: $9 = 3^2,\ 4 = 2^2,\ 3 = 3^1,\ 2 = 2^1,\ 8 = 2^3$, των οποίων το Ε.Κ.Π. είναι το $2^3 \cdot 3^2 = 72$. Συνεπώς, όλα τα μήκη των οποιωνδήποτε τμημάτων της χορδής κάλλιστα θα μπορούσαν να εκφρασθούν σε ακέραια πολλαπλάσια του $\frac{1}{72}$ του μήκους ολόκληρης της χορδής.

Οι πληροφορίες από το Θεώρημα 20 οδηγούν στον υπολογισμό των τμημάτων της χορδής που σχετίζονται με τους εστώτες και με τους φερόμενους φθόγγους του αμετάβολου συστήματος των αρχαίων Ελλήνων.

Ενέργεια 7η και σχέση (2) $\Rightarrow \varepsilon\mu = \frac{\varepsilon\beta}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{x}{4} = \frac{x}{32}$ (34)

σχέση (34) και (2) $\Rightarrow \mu\beta = \mu\varepsilon + \varepsilon\beta = \frac{x}{32} + \frac{x}{4} = \frac{9x}{32}$ (35)

Ενέργεια 8η και σχέση (35) $\Rightarrow \mu\nu = \frac{\mu\beta}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{9x}{32} = \frac{9x}{256}$ (36)

σχέση (36) και (35) $\Rightarrow \nu\beta = \nu\mu + \mu\beta = \frac{9x}{256} + \frac{9x}{32} = \frac{81x}{256}$ (37)

Ενέργεια 9η και σχέση (37) $\Rightarrow \nu\xi = \frac{1}{3}\nu\beta = \frac{1}{3} \cdot \frac{81x}{256} = \frac{27x}{256}$ (38)

σχέση (38) και (37) $\Rightarrow \xi\beta = \xi\nu + \nu\beta = \frac{27x}{256} + \frac{81x}{256} = \frac{108x}{256}$ (39)

Ενέργεια 10η και σχέση (39) $\Rightarrow \xi o = \frac{\xi\beta}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{108x}{256} = \frac{54x}{256}$ (40)

Ενέργεια 11η και σχέση (40) $\Rightarrow o\pi = o\xi = \frac{54x}{256}$ (41)

Ενέργεια 12η και σχέση (3) $\Rightarrow \gamma\rho = \frac{1}{4}\beta\gamma = \frac{1}{4} \cdot \frac{3x}{4} = \frac{3x}{16}$ (42)

σχέση (20),(36) και (34) $\Rightarrow \eta\nu = \eta\varepsilon - \nu\varepsilon = \eta\varepsilon - (\nu\mu + \mu\varepsilon) = \frac{x}{12} - \left(\frac{9x}{256} + \frac{x}{32}\right) = \frac{13x}{768}$

(43)

σχέση (38), (19) και (43) $\Rightarrow \xi\zeta = \xi\nu - (\zeta\eta + \eta\nu) = \frac{27x}{256} - \left(\frac{x}{24} + \frac{13x}{768}\right) = \frac{3x}{64}$

(44)

σχέση (18) και (44) $\Rightarrow \kappa\xi = \kappa\zeta - \xi\zeta = \frac{5x}{72} - \frac{3x}{64} = \frac{13x}{576}$ (45)

σχέση (2) και (42) $\Rightarrow \rho\delta = \gamma\delta - \gamma\rho = \frac{x}{4} - \frac{3x}{16} = \frac{x}{16}$ (46)

σχέση (40) και (39) $\Rightarrow o\beta = o\xi + \xi\beta = \frac{\xi\beta}{2} + \xi\beta = \frac{3}{2}\xi\beta = \frac{3}{2} \cdot \frac{108x}{256} = \frac{81x}{128}$ (47)

σχέση (47),(46) και(5) $\Rightarrow o\rho = o\beta - (\rho\delta + \delta\beta) = \frac{81x}{128} - \left(\frac{x}{16} + \frac{x}{2}\right) = \frac{9x}{128}$ (48)

σχέση (9) και (47) $\Rightarrow \theta o = \theta\beta - \beta o = \frac{2x}{3} - \frac{81x}{128} = \frac{13x}{384}$ (49)

σχέση (41) και (39) $\Rightarrow \pi\beta = \pi o + o\xi + \xi\beta = \frac{54x}{256} + \frac{54x}{256} + \frac{108x}{256} = \frac{27x}{32}$ (50)

σχέση (50) και (23) $\Rightarrow \pi\gamma = \pi\beta - \gamma\beta = \frac{27x}{32} - \frac{24x}{32} = \frac{3x}{32}$ (51)

σχέση (14) και (51) $\Rightarrow \lambda\pi = \lambda\gamma - \pi\gamma = \frac{5x}{36} - \frac{3x}{32} = \frac{13x}{288}$ (52)

σχέση (34) και (2) $\Rightarrow \mu\beta = \mu\varepsilon + \varepsilon\beta = \frac{x}{32} + \frac{x}{4} = \frac{9x}{32}$ (53)

σχέση (43) και (37) $\Rightarrow \eta\beta = \eta\nu + \nu\beta = \frac{13x}{768} + \frac{81x}{256} = \frac{x}{3}$ (54)

σχέση (44) και (21) $\Rightarrow \xi\beta = \xi\zeta + \zeta\beta = \frac{3x}{64} + \frac{3x}{8} = \frac{27x}{64}$ (55)

σχέση (17) και (11) $\Rightarrow \delta\beta = \delta\kappa + \kappa\beta = \frac{x}{18} + \frac{4x}{9} = \frac{x}{2}$ (56)

σχέση (46) και (56) $\Rightarrow \rho\beta = \rho\delta + \delta\beta = \frac{x}{16} + \frac{x}{2} = \frac{9x}{16}$ (57)

σχέση (49) και (47) $\Rightarrow \theta\beta = \theta o + o\beta = \frac{13x}{384} + \frac{81x}{128} = \frac{2x}{3}$ (58)

σχέση (51) και (3) $\Rightarrow \pi\beta = \pi\gamma + \gamma\beta = \frac{3x}{32} + \frac{3x}{4} = \frac{27x}{32}$ (59)

Για τα μήκη των μη δονούμενων τμημάτων της χορδής (θέσεις των τάστων) ισχύουν οι σχέσεις:

σχέση (13) $\Rightarrow \alpha\lambda = \frac{x}{9}$

σχέση (1) και (59) $\Rightarrow \alpha\pi = \alpha\beta - \beta\pi = x - \frac{27x}{32} = \frac{5x}{32}$ (60)

σχέση (26) $\Rightarrow \alpha\gamma = \frac{x}{4}$

σχέση (27) $\Rightarrow \alpha\theta = \frac{x}{3}$

σχέση (1) και (47) $\Rightarrow \alpha o = \alpha\beta - \beta o = x - \frac{81x}{128} = \frac{47x}{128}$ (61)

σχέση (1) και (57) $\Rightarrow \alpha\rho = \alpha\beta - \beta\rho = x - \frac{9x}{16} = \frac{7x}{16}$ (62)

σχέση (28) $\Rightarrow \alpha\delta = \frac{x}{2}$

σχέση (29) $\Rightarrow \alpha\kappa = \frac{5x}{9}$

σχέση (1) και (55) $\Rightarrow \alpha\xi = \alpha\beta - \beta\xi = x - \frac{27x}{64} = \frac{37x}{64}$ (63)

σχέση (30) $\Rightarrow \alpha\zeta = \frac{5x}{8}$

σχέση (31) $\Rightarrow \alpha\eta = \frac{2x}{3}$

σχέση (1) και (37) $\Rightarrow \alpha\nu = \alpha\beta - \beta\nu = x - \frac{81x}{256} = \frac{175x}{256}$ (64)

σχέση (1) και (35) $\Rightarrow \alpha\mu = \alpha\beta - \beta\mu = x - \frac{9x}{32} = \frac{23x}{32}$ (65)

σχέση (32) $\Rightarrow \alpha\varepsilon = \frac{3x}{4}$

σχέση (1) $\Rightarrow \alpha\beta = x$

<u>Ο Στόχος του Έργου</u>

Με μια πρώτη ματιά, ο γενικός στόχος του έργου είναι να θεμελιώσει, μέσω της θεωρίας λόγων, ένα σύστημα μέτρησης με το οποίο οι τόνοι να μπορούν επακριβώς να καθοριστούν κι επομένως, να δώσει μια ακριβή μαθηματική περιγραφή των σχέσεων μεταξύ των νοτών της κλίμακας. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι οι σχέσεις μεταξύ των τόνων δεν είναι επακριβώς μετρήσιμες με το αυτί. Οι προσπάθειες των «αρμονικών» να εγκαθιδρύσουν μια ακουστική μονάδα μέτρησης απέτυχε. Έτσι, αν πρέπει να επιτευχθεί ακρίβεια, πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος μεταφοράς των σχέσεων των τόνων από το ακουστικό πεδίο στο οπτικό, όπου είναι διαθέσιμα αποδεκτά μέτρα. Κι αυτό ακριβώς είναι που επιτυγχάνει το σύστημα των λόγων υπό τους όρους των λόγων χορδών που κατοικούν στο οπτικό πεδίο.

Έτσι, η *«Κατατομή Κανόνος»* προορίζεται για τον θεωρητικό. Ο σκοπός της είναι να μεταφράσει το σύστημα της κλίμακας από ένα πλαίσιο ορολογιών και εννοιών σε ένα άλλο, από ένα σχήμα οιονεί – γραμμικών και ακουστικών σχέσεων σε ένα σχήμα αριθμητικών και γεωμετρικών λόγων.

Κατά τον Barker, ο πραγματικός σκοπός του έργου είναι απλά να δώσει τη δυνατότητα στο αντικείμενο της μουσικής να αντιμετωπιστεί με ακρίβεια από τον μαθηματικό φιλόσοφο, ή από φιλοσόφους κάθε είδους. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ένα μέρος του πυθαγόρειου προγράμματος σχετίζει τα μουσικά φαινόμενα με φαινόμενα άλλων επιστημονικών πεδίων, ιδίως με αυτά της αστρονομίας. Για να γίνει αυτό, πρέπει αμφότερα να εκφρασθούν με κοινή ορολογία, η οποία να παρέχεται από τα μαθηματικά των λόγων. Ωστόσο, το θέμα ίσως είναι γενικότερο. Θα λέγαμε ότι η κλίμακα πρέπει να είναι εκ των προτέρων καθορισμένη με μέσα που εξαρτώνται ουσιαστικά από το αυτί. Όμως, αυτά τα μέσα, όπως λέει και ο Αριστόξενος, είναι αρμοδιότητα του ειδικού μουσικού. Δεν υπάρχει κάποιο ακουστικό μέτρο σε μορφή ράβδου με το οποίο όλα τα λογικά και ευαίσθητα πλάσματα να είναι προικισμένα. Αλλά οι λόγοι και οι σχέσεις τους εμπίπτουν στην αρμοδιότητα της αιτίας. Έτσι η μετάφραση δεν γίνεται απαραίτητα από το ανακριβές στο ακριβές, αλλά μάλλον από το ειδικό και εσωτερικό σε μια γλώσσα όπου η ικανότητα καθορισμού των όρων δεν εξαρτάται από μια φοβερή βιολογική ικανότητα ή από ένα ιδιαίτερο είδος εκπαίδευσης, αλλά από την καθολική δύναμη της αιτίας. Αν αυτός είναι ο σκοπός του έργου, τότε είναι πολύτιμος και δίνει ένα ικανοποιητικό νόημα στον ισχυρισμό ότι οι Πυθαγόρειοι εκτιμούσαν την αιτία περισσότερο από την αντίληψη, ως κριτήριο μουσικής κρίσης, ένα νόημα που δεν απαιτεί την απόρριψη των δεδομένων της αντίληψης, από τα οποία πρέπει να ξεκινήσει οπωσδήποτε το έργο τους.

Συμπερασματικά, η αντίληψη φαίνεται να είναι αντιμέτωπη με την αιτία σε δύο βασικές περιοχές. Η πρώτη σχετίζεται με την άρνηση ότι η οκτάβα είναι ακριβώς έξι τόνοι, ότι ο τόνος μπορεί να διαιρεθεί ακριβώς στη μέση κλπ. Όμως, αυτές οι προτάσεις δεν απαρνούνται αυτό που η αντίληψη απαιτεί. Η αντίληψη δύσκολα μπορεί να θεωρηθεί τόσο ακριβής, ώστε να μπορεί να ορίσει αν αυτές οι διαφορές υπάρχουν ή όχι. Οι πυθαγόρειοι ισχυρισμοί είναι σημαντικοί, όχι γιατί δείχνουν ότι η αντίληψη είναι λανθασμένη, αλλά γιατί δείχνουν ότι η αντίληψη δεν μπορεί να κάνει λεπτές διακρίσεις, κάτι που η αιτία μπορεί, και ότι όπου εμφανίζεται θέμα αντιστροφής, τα πράγματα γίνονται λιγότερο αξιόπιστα. Το δεύτερο σημείο αντιπαράθεσης βρίσκεται στην κατά μέτωπο σύγκρουση μεταξύ των δύο σχολών, σχετικά με το διάστημα της οκτάβας και μια τετάρτη. Εδώ η αντιπαράθεση είναι ευθεία, μια και η αντίληψη των ειδικών – στην οποία βασίζεται η βασική λίστα σύμφωνων διαστημάτων και για τις δύο μεριές – είναι ομόφωνη στην αποδοχή ως σύμφωνου ενός διαστήματος που η αιτία απορρίπτει.

Ωστόσο, οι απόψεις που στηρίζει το πρόγραμμα των Πυθαγορείων είναι ακαταμάχητες. Τα μαθηματικά μπορούν να συσχετιστούν όχι μόνο με την αστρονομία, αλλά, όπως ισχυρίζεται και ο Τίμαιος, μπορούν να αποτελέσουν το συνδετικό κρίκο μεταξύ της μουσικής και της ψυχής κι επομένως, μεταξύ της μουσικής και αυτών των ηθικών αντιλήψεων με τις οποίες οι φιλόσοφοι του παρελθόντος τα είχαν συνδέσει επίμονα. Η ουσιαστική αντικειμενική σκοπιά θα μπορούσε να είναι ένα μαθηματικά αποδείξιμο σύστημα ηθικών.